Tema 2:

APLICACIONES LINEALES

Prof. Rafael López Camino
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Material docente para el alumno
Asignatura: Geometría I. Curso 1998/99
Licenciatura: Matemáticas (Plan 1973)
Universidad de Granada

1. Demostrar que una aplicación lineal es constante si y sólo si es la aplicación lineal nula.

2. Decidir cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales:

   a) $f(x,y,z) = x - 2z$ de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}$,
   b) $f(x,y,z) = xy + yz$ de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}$,
   c) $f(x+iy) = (a+bi)\cdot(x+iy)$ de $\mathbb{C}$ en sí mismo,
   d) $f(x,y) = (y-x, x-y, y-x)$ de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$,
   e) $f(x,y) = (x+y, x+2, x-y)$ de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$.

3. Sea considera la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por
$$f(x,y,z) = (x,0,z), \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$
Probar que f es lineal, y calcular su núcleo y su imagen.

4. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y sea $g \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ tal que $g \circ g = g$. Demostrar que $V = \ker(g) \oplus \mathrm{Im}(g)$. Aplicar esto para demostrar que $\mathbb{C} = U \oplus W$, siendo U y W los subespacios vectoriales de $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ dados por
$$\begin{array}{rcl} U &=& \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Imag}(z) = 0\}, \\ W &=& \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Real}(z) = 0\}. \end{array}$$

5. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V. Denotemos por
$$\mathrm{Inv}(f) = \{x \in V \ : \ f(x) = x\},$$
llamado el conjunto de los elementos invariantes por f. Demostrar que $\mathrm{Inv}(f)$ es un subespacio vectorial de V.

6. Sea V un espacio vectorial real que admite un endomorfismo j que verifica $j \circ j = -1_V$. Probar que si $V(\mathbb{R})$ es finitamente generado, entonces $\dim_{\mathbb{R}} V$ es par, y que definiendo
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times V & \longrightarrow & V \\ (a+bi, x) & \longmapsto & a\cdot x + b \cdot j(x), \end{array}$$
entonces V resulta ser un espacio vectorial complejo.

7. Encontrar un automorfismo f de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ de manera que $f_*(U) = U'$, siendo U y U' los subespacios de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ definidos por

$$\begin{array}{rcl} U & = & \{(a,b,0) \ : \ a,b \in \mathbb{R}\}, \\ U' & = & \{(0,c,d) \ : \ c,d \in \mathbb{R}\}. \end{array}$$

¿Es posible encontrar más de un automorfismo en estas condiciones?

8. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Definimos una aplicación

$$\begin{array}{rccc} f_A : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ & (a_1,\ldots,a_n) & \longmapsto & (a'_1,\ldots,a'_m), \end{array}$$

donde $(a'_1,\ldots,a'_m)$ viene definida por la ecuación

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

y $A = (a_{ij})_{i,j}$. Demostrar que f_A es lineal. Demostrar también que $M(f_A, B, B') = A$, siendo B y B' las bases ordenadas usuales de $\mathbb{K}^n$ y $\mathbb{K}^m$, respectivamente.

9. Sea $h : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por

$$h(a_1,a_2,a_3,a_4) = (a_1 + a_3 - a_4, a_2 + a_4, a_1 + a_2 + a_3).$$

Hallar la matriz de h en las bases ordenadas $B = (x_1,x_2,x_3,x_4)$ de $\mathbb{R}^4$ y $B' = (x'_1,x'_2,x'_3)$ de $\mathbb{R}^3$ definidas mediante:

$$\begin{array}{ll} x_1 = (-1,0,0,0), & x'_1 = (0,1,1), \\ x_2 = (1,-1,0,0), & x'_2 = (1,0,1), \\ x_3 = (1,1,-1,0), & x'_3 = (1,1,0). \\ x_4 = (1,1,1,-1). & \end{array}$$

Encontrar, si es posible, una base ordenada $\widetilde{B}$ de $\mathbb{R}^4$ y otra $\widetilde{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ de forma que

$$M(h, \widetilde{B}, \widetilde{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcular el rango de h. ¿Es h sobreyectiva?

10. Sea define $f : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ mediante

$$f(p(x)) = \frac{dp}{dx}(x),$$

donde $\frac{d}{dx}$ denota "derivada respecto de x". Demostrar que f es lineal. Si llamamos

$$\mathbb{R}_n[x] = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \ : \ \text{grado}(p(x)) \leq n\},$$

definimos otra aplicación,

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_{n+1}[x] \\ & p(x) & \longmapsto & e^{x^2} \cdot \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2} \cdot p(x)\right). \end{array}$$

Se pide:

a) Probar que g es lineal.

b) Hallar el núcleo de g y la dimensión de su imagen.

c) Hallar la matriz de g respecto de las bases ordenadas usuales de $\mathbb{R}_n[x]$ y $\mathbb{R}_{n+1}[x]$.

11. Dada $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x, 2x + y)$, probar que f es un automorfismo, y calcular su inversa.

12. Si $V(\mathbb{K})$ es un espacio vectorial de dimensión n, un HIPERPLANO de V es un subespacio vectorial de V con dimensión $n - 1$. Probar que si f es una aplicación lineal no nula de V en $\mathbb{K}$, entonces f es sobreyectiva, y su núcleo es un hiperplano de V.

13. Probar que si f es un endomorfismo de un espacio vectorial V, entonces

$$f \circ f = f_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Im}(f) \subseteq \ker(f).$$

14. Sean $f, g : V \longrightarrow V'$ dos aplicaciones lineales. Probar que

$$\text{rango}(f+g) \leq \text{rango}(f) + \text{rango}(g),$$

y buscar algún ejemplo donde se dé la igualdad.

Sean ahora $f : V \longrightarrow V'$ y $h : V' \longrightarrow V''$ aplicaciones lineales. Demostrar que

$$\text{rango}(h \circ f) \leq \text{mínimo}\{\text{rango}(h), \text{rango}(f)\}.$$

Supongamos que h fuese un isomorfismo. Probar entonces que el rango de $h \circ f$ y el rango de f coinciden. Análogamente, probar que el rango de $h \circ f$ es igual al rango de h si suponemos que f es un isomorfismo, siendo h cualquier aplicación lineal. Utilizando la definición de rango de una matriz, establecer los resultados correspondientes a los anteriores para matrices.

15. Se consideran los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^m(\mathbb{R})$. Demostrar que existe un monomorfismo—resp. epimorfismo—de espacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ si y sólo si $n \leq m$—resp. $n \geq m$—. Generalizar.

16. Sea V un espacio vectorial finito-dimensional, y $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de V. Sea $H = \{x_1, \ldots, x_r\}$, $r \leq n$, un subconjunto de V. Probar que H es linealmente independiente si y sólo si existe un automorfismo f de V que verifique $f(e_i) = x_i$, $\forall i = 1 \ldots, r$.

17. Si $V(\mathbb{K})$ es un espacio vectorial de dimensión finita y existe un endomorfismo f de V verificando

$$\dim_{\mathbb{K}} \ker(f) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(f),$$

probar que la dimensión de V es par. ¿Puede ser f un automorfismo?

18. Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial. Sean U, W dos subespacios vectoriales de V, verificando $V = U \oplus W$. Se definen las aplicaciones

$$p_U : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ u+w & \longmapsto & u \end{array}, \qquad p_W : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ u+w & \longmapsto & w \end{array},$$

donde dado $x \in V$, $u + w$ denota la descomposición única de x en suma de un elemento en U y otro de W. Demostrar que ambas aplicaciones son lineales, y calcular sus núcleos e imágenes. Demostrar también que

$$p_U \circ p_W = p_W \circ p_U = 0, \quad p_U \circ p_U = p_U, \quad p_W \circ p_W = p_W.$$

19. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$, siendo $\mathbb{K}$ un cuerpo conmutativo con característica distinta de 2, que verifica la propiedad $f \circ f = 1_V$. Demostrar que f es un automorfismo, y que $V = U \oplus W$, siendo

$$U = \{x \in V \ : \ f(x) = x\}, \quad \text{y} \quad W = \{x \in V \ : \ f(x) = -x\}.$$

—Comprobar previamente que tanto U como W son subespacios de V—Para ello, utilizar el problema 4, construyendo a partir de f un endomorfismo g de $V(\mathbb{K})$ de modo que $g \circ g = g$, y aplicar a g el resultado de dicho problema. Particularizar al caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ y $f(a, b) = (a, -b)$.

20. Sea $V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \ : \ \text{grado}(p(x)) \leq 2\}$. Se define para cada número real r una aplicación

$$f_r : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 & \longmapsto & a_0 + a_1 x + r \cdot a_2 x^2. \end{array}$$

Demostrar que $\forall r \in \mathbb{R}$, f_r es lineal. ¿ Para qué valores de r es f_r un automorfismo?

21. Se consideran los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^m(\mathbb{R})$, y a partir de ellos, su espacio producto, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Probar que $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^{n+m}$ son espacios vectoriales isomorfos.

22. Sean V_1, V_2 dos espacios vectoriales reales, y sean

$$B_1 = (x_1, x_2, x_3), \qquad B_2 = (y_1, y_2)$$

bases ordenadas en V_1 y V_2, respectivamente. Se consideran las aplicaciones lineales f y g definidas por

$$\begin{array}{rccc} f: & V_1 & \longrightarrow & V_2 \\ & x_1 & \longmapsto & y_1 - y_2 \\ & x_2 & \longmapsto & y_2 \\ & x_3 & \longmapsto & y_1 + 2y_2 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rccc} g: & V_2 & \longrightarrow & V_1 \\ & y_1 & \longmapsto & x_1 - x_2 \\ & y_2 & \longmapsto & x_1 - x_3 \end{array}$$

Hallar las siguientes matrices:

a) $M(f, B_1, B_2)$, $M(g, B_2, B_1)$,

b) $M(g \circ f, B_1)$, $M(f \circ g, B_2)$.

23. Sean V_1,V_2,B_1 y B_2 como en el problema precedente. Se considera la aplicación lineal h dada por

$$h(x_1) = y_1 - y_2, \quad h(x_2) = y_1, \quad h(x_3) = 2y_1 - y_2.$$

Hallar $M(h, B_1, B_2)$, y bases del núcleo e imagen de h.

24. Lo mismo del problema anterior para $f : V_1 \longrightarrow V_2$ y

$$B_1 = (x_1, x_2, x_3), \;\; B_2 = (y_1, y_2, y_3, y_4),$$

donde f viene definida por

$$\begin{array}{rcl} f(x_1) & = & y_1 + y_2, \\ f(x_1 - x_3) & = & y_2, \\ f(x_2 - x_3) & = & 2y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4. \end{array}$$

25. En $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios dados por

$$\begin{aligned} U &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \begin{array}{r} x+2y+z=0 \\ x-2y-z=0 \end{array} \right\}, \\ W &= L\left(\{(1,0,1),(1,1,0)\}\right). \end{aligned}$$

Encontrar un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ que verifique

$$f_*(W) = U, \qquad \dim_{\mathbb{R}} \ker(f) = 2.$$

26. Hallar la matriz en la base ordenada usual de $\mathbb{R}^3$ de un endomorfismo f definido por las siguientes condiciones:

a) La aplicación f, restringida al plano de ecuación $x+y+z=0$, es una homotecia de razón 3;

b) $f(0,0,-1) = (10,-5,-3)$.

27. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(1,0,1) = (0,1), \quad f(0,0,-1) = (1,1), \quad f(2,1,1) = (1,0).$$

a) Hallar la matriz de f respecto de las bases ordenadas usuales de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

b) Hallar la matriz de f respecto de las bases ordenadas

$$B = ((1,0,1),(0,0,-1),(2,1,1)),\ B' = ((0,1),(1,0)).$$

c) Lo mismo del apartado anterior respecto de las bases ordenadas

$$\overline{B} = ((1,0,-1),(0,0,1),(2,1,0)),\ \overline{B'} = ((2,0),(0,2)).$$

28. Supongamos que $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal cuya matriz en las bases ordenadas $B_1 = (x_1,x_2,x_3)$, $\quad B_2 = (y_1,y_2)$ es

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calcular la matriz de f respecto de las bases ordenadas

$$\overline{B_1} = (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2),$$

$$\overline{B_2} = \left(\frac{1}{2}(y_1 + y_2), \frac{1}{2}(y_1 - y_2)\right).$$

29. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ se definen los subespacios vectoriales

$$U = L(\{(1,1,1)\}), \qquad \text{y} \qquad W = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ : \ a+b+c=0\}.$$

a) Encontrar un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ cuyo núcleo sea U y cuya imagen sea W.

b) Hallar la matriz de f respecto de la base ordenada usual de $\mathbb{R}^3$.

c) Elegir una base ordenada B' en $\mathbb{R}^3/\ker(f)$, y calcular la matriz de la aplicación lineal

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3/\ker(f) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x + \ker(f) & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

con respecto a ésta y a la base ordenada usual B de $\mathbb{R}^3$.

30. Considerando matrices cuadradas reales de orden 2, probar mediante contraejemplos que, en general, no son ciertas las igualdades siguientes:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2, \qquad (A-B)\cdot(A+B) = A^2 - B^2.$$

31. Supongamos que A es una matriz cuadrada de orden n sobre $\mathbb{K}$, que verifica la ecuación

$$A^2 + A + I_n = 0.$$

Probar que A es regular.

32. Dada una matriz cuadrada A, se define su traza, traza(A), como la suma de los elementos de su diagonal, es decir,

$$\text{traza}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}, \qquad \text{siendo } A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Demostrar que si A y B son matrices cuadradas de orden n sobre $\mathbb{K}$ y $a \in \mathbb{K}$, entonces se verifican:

$$\begin{aligned} \text{traza}(A+B) &= \text{traza}(A) + \text{traza}(B), \\ \text{traza}(a \cdot A) &= a \cdot \text{traza}(A), \\ \text{traza}(A \cdot B) &= \text{traza}(B \cdot A). \end{aligned}$$

Demostrar que dos matrices semejantes tienen la misma traza, pero que el recíproco es falso; más aún, que si dos matrices tienen el mismo rango y la misma traza no tienen porqué ser semejantes. A partir de esto, definir la traza de un endomorfismo. Calcular la traza del endomorfismo f de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ dado por

$$f(a,b) = (a+b, a-b), \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

33. Para cada matriz regular P de orden n, se considera la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & P^{-1} \cdot A \cdot P. \end{array}$$

Probar que es un automorfismo del espacio vectorial $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

34. Sea A una matriz cuadrada de orden n sobre $\mathbb{K}$, tal que

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad A \cdot B = B \cdot A.$$

Probar que existe $a \in \mathbb{K}$ tal que $A = a \cdot I_n$.

35. (MULTIPLICACION DE MATRICES POR CAJAS)

Consideremos dos matrices M y N divididas por "cajas" de la siguiente forma:

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right), \quad N = \left(\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array} \right),$$

donde los órdenes de las "cajas" son los siguientes: A es de orden $m \times n$, B de $m \times n'$, C de $m' \times n$, D de $m' \times n'$, E de orden $n \times p$, F de $n \times p'$, G de $n' \times p$, y H de orden $n' \times p'$. Probar que el producto $M \cdot N$ puede obtenerse como

$$M \cdot N = \left(\begin{array}{c|c} A \cdot E + B \cdot G & A \cdot F + B \cdot H \\ \hline C \cdot E + D \cdot G & C \cdot F + D \cdot H \end{array} \right).$$

36. Sea A una matriz cuadrada de orden n sobre $\mathbb{K}$. Diremos que A es triangular superior si todos los escalares a_{ij} de A con $i < j$ son nulos; A es triangular inferior si todos los a_{ij} de A con $i > j$ son nulos; y A es diagonal si todos los a_{ij} de A con $i \neq j$ son nulos. Llamemos $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}^0$ y $\mathcal{D}$ a los subconjuntos de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de matrices triangulares superiores, triangulares inferiores y diagonales. Demostrar que los tres son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, y que
$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_0 + \mathcal{T}^0 + \mathcal{D}.$$
¿Es esta suma directa? Estudiar el comportamiento de estos tres conjuntos de matrices frente al producto.

37. Sean A y B matrices cuadradas de orden n sobre $\mathbb{K}$ semejantes. Probar que A si es regular, entonces B también lo es, y que si A verifica la ecuación
$$a \cdot X^2 + b \cdot X + c \cdot I_n = 0, \quad \text{donde } a, b, c \in \mathbb{K},$$
entonces B también es solución de la misma.

38. Sea A una matriz cuadrada de orden n sobre $\mathbb{K}$. Probar que $A^2 = I_n$ si y sólo si $(A - I_n) \cdot (A + I_n) = 0$. Si tomamos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $B^2 = B$, probar que $A = 2 \cdot B - I_n$ verifica $A^2 = I_n$.

39. En $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, se define el subconjunto
$$U = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \ : \ A +^t \overline{A} = 0\}.$$
   a) Calcular explícitamente una matriz de U.

   b) Demostrar que U es un subespacio vectorial considerando en $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ la estructura de espacio vectorial real, pero no si se considera la estructura compleja. Probar que la dimensión (real) de U es 4.

   c) Consideremos la matriz
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in U.$$

Definimos la aplicación $f_B : U \longrightarrow U$ por

$$f_B(A) = B \cdot A - A \cdot B, \quad \forall A \in U.$$

Probar que f_B es un endomorfismo de U, y calcular su núcleo y su imagen.

40. Hallar todas las matrices reales X de orden 2 tales que $X^2 = X$. Hallar también todas las matrices reales Y de orden 2 tales que $Y^2 = 2 \cdot Y$.

41. Sea V un espacio vectorial real de dimensión 2, y $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}V$ que verifica $f \circ f = f_0$, siendo f_0 el endomorfismo nulo de $V(\mathbb{R})$. Demostrar que o bien $f = f_0$, o si $f \neq f_0$, es posible encontrar una base ordenada B de $V(\mathbb{R})$ tal que

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

—Indicación: Probar que si $f(x) \neq 0$, entonces $\{f(x), x\}$ es linealmente independiente—. Generalizar a mayores dimensiones. A partir de esto, encontrar todas las matrices cuadradas reales X de orden 2, tales que $X^2 = 0$.

42. Sean V y V' dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación. Probar que f es lineal si y sólo si su grafo,

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in V \times V' \ : \ x \in V\},$$

es un subespacio vectorial de $V \times V'$. En este último caso, calcular $\dim_{\mathbb{K}} G(f)$.

43. Sea V un espacio vectorial real de dimensión par. Demostrar que existe $j \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}V$ tal que $j \circ j = -1_V$. ¿Qué aporta esto a lo ya obtenido en el problema 6?

44. Encontrar todas las matrices $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ que cumplan $A^2 = -I_{2n}$.

45. **a)** Sea V un espacio vectorial real con dimensión n. Sea $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}V$ verificando $f \circ f = f$. Probar que la traza de f y el rango de f coinciden.

    b) Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = A$. Probar que su traza y su rango son iguales.

46. Encontrar, si es posible, un endomorfismo $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ tal que

$$\operatorname{Im}(f) = L(\{e_1 - e_2, e_1 + e_4\}), \quad f \circ f = f, \quad \operatorname{traza}(f) = 2.$$

47. Para cada matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fija, se considera la aplicación

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & X & \longmapsto & A \cdot X. \end{array}$$

Probar que F es lineal, y encontrar una base ordenada B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que

$$M(F,B) = \begin{pmatrix} A & & & \\ & \ddots & n & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{pmatrix}_{n^2 \times n^2}.$$

Probar también que $\operatorname{traza}(F) = n \cdot \operatorname{traza}(A)$.

48. **a)** Sea V un espacio vectorial complejo, y sea $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}} V$ verificando $f \circ f = -1_V$. Demostrar que

$$U = \{x \in V \ : \ f(x) = i \cdot x\},$$
$$W = \{x \in V \ : \ f(x) = -i \cdot x\}$$

son subespacios vectoriales de V, y que se tiene $V = U \oplus W$.

b) Hallar todas las matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ que cumplen $A^2 = -I_3$.

49. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión n, de manera que existe un vector $x_0 \in V$ tal que

$$f^{n-k}(x_0) \neq 0, \quad \forall k = 1, \ldots, n-1, \qquad f^n(x_0) = 0.$$

Probar que el conjunto

$$\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\}$$

es una base de V, y calcular la matriz de f en la ordenación de la base anterior dada en la última expresión.