Tema 1:

ESPACIOS VECTORIALES

Prof. Rafael López Camino
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Material docente para el alumno
Asignatura: Geometría I. Curso 1998/99
Licenciatura: Matemáticas (Plan 1973)
Universidad de Granada

1. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. A partir de los axiomas de espacio vectorial, demostrar las siguientes identidades:

$$a \cdot (b \cdot x + c \cdot y) = (a \cdot b) \cdot x + (a \cdot c) \cdot y,$$

$$a \cdot (x + (-y)) = a \cdot x + (-a \cdot y),$$

   $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in V$.

2. Probar que la conmutatividad de la suma de vectores puede deducirse de los otros axiomas de espacio vectorial.

3. Probar que la propiedad modular de la definición de espacio vectorial puede sustituírse por

$$\text{Dados } a \in \mathbb{K}, x \in V, \quad a \cdot x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{ó} \quad x = 0.$$

4. En $\mathbb{R}^3$ consideramos la suma usual, y el producto por escalares dado mediante

$$a \cdot (a_1, a_2, a_3) = (a \cdot a_1, a \cdot a_2, 3a \cdot a_3).$$

   ¿Es $\mathbb{R}^3$ un espacio vectorial con estas operaciones?

5. Demostrar que el conjunto de todas las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ cuando se define la suma de elementos de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, y el producto de escalares reales por funciones mediante

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

   donde $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, y $a \in \mathbb{R}$. Demostrar que dicho espacio vectorial no es finitamente generado. Probar que para cada número natural n, existe un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ con dimensión n.

6. Sean V, V' dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. En $V \times V'$, definimos
$$(x, x') + (y, y') = (x + y, x' + y'),$$
$$a \cdot (x, y) = (a \cdot x, a \cdot y),$$
donde $a \in \mathbb{K}$. Demostrar que $V \times V'$ es, con estas operaciones, un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Si H es un sistema de generadores de V y H' un sistema de generadores de V', probar que
$$\{(x, 0') : x \in H\} \cup \{(0, x') : x' \in H'\}$$
es un sistema de generadores de $V \times V'$. A partir de esto, probar que si V y V' son finitamente generados, también lo es $V \times V'$. Por último, demostrar que en este caso,
$$\dim_{\mathbb{K}}(V \times V') = \dim_{\mathbb{K}} V + \dim_{\mathbb{K}} V'.$$

7. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales suyos?
$$\begin{aligned} U_1 &= \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 : a_1 + a_2 + 2a_3 = 0\}, \\ U_2 &= \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 : a_1^2 = a_2\}, \\ U_3 &= \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 : a_1 + a_2 = 0 \text{ y } a_1 - a_3 = 0\}. \end{aligned}$$

8. Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial. Probar con un contraejemplo que en general la unión de subespacios vectoriales de V no es un subespacio vectorial. Sin embargo, demostrar que si $\{W_i\}_{i \in I}$ es una familia de subespacios vectoriales de V verificando
$$\forall i, j \in I, \exists k \in I \quad / \quad W_i \subseteq W_k \text{ y } W_j \subseteq W_k,$$
entonces $\cup_{i \in I} W_i$ sí es un subespacio vectorial de V.

9. Sea V un espacio vectorial complejo finitamente generado. Consideremos V sobre $\mathbb{R}$, que también es finitamente generado. Probar que
$$\dim_{\mathbb{R}} V = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}} V.$$
Aplicar esto a $V = \mathbb{C}^n$.

10. Se considera $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales. Demostrar que $\{3, \sqrt{2}\}$ es linealmente independiente. Probar que este mismo subconjunto, considerado en el espacio $\mathbb{R}(\mathbb{R})$, es linealmente dependiente. Probar también que el espacio $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ no es finitamente generado (suponer que lo fuera y contradecir que $\mathbb{R}$ no es numerable).

11. Sea V un espacio vectorial real. Supongamos que $\{x, y, z\} \subset V$ es linealmente independiente. Probar que $\{x, x+y, x+y-z\}$ es también linealmente independiente, y que el recíproco es asímismo cierto.

12. En $\mathbb{C}^2(\mathbb{C})$, probar que los vectores $x_1 = (1+i, 2i)$, $x_2 = (1, 1+i)$ son linealmente dependientes.

13. Sea V un espacio vectorial real. En $V \times V$ se definen las siguientes operaciones:
$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$(a + bi) \cdot (x, y) = (ax - by, ay + bx),$$
donde $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V \times V$ y $a + bi \in \mathbb{C}$.

    i) Probar que las operaciones anteriores dotan a $V \times V$ de estructura de espacio vectorial complejo.

    ii) Sea $x \in V$, $x \neq 0$. ¿Son los vectores $(x, 0), (0, x)$ linealmente independientes?

    iii) Probar que si $x_1, \ldots, x_n$ son linealmente independientes en $V(\mathbb{R})$ (resp. forman un sistema de generadores de $V(\mathbb{R})$), entonces $(x_1, 0), \ldots, (x_n, 0)$ son linealmente independientes en $(V \times V)(\mathbb{C})$ (resp. forman un sistema de generadores de $(V \times V)(\mathbb{C})$).

    iv Cuando $V(\mathbb{R})$ sea finitamente generado, relacionar las dimensiones de $V(\mathbb{R})$ y de $(V \times V)(\mathbb{C})$.

14. Sea $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el espacio vectorial dado en el problema 5. Sea consideran $f, g, h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definidas por
$$f(x) = x^2 + 1, \qquad g(x) = 2x, \qquad h(x) = 3^x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

¿Es $\{f, g, h\}$ linealmente independiente?

15. Se consideran los subconjuntos de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$U = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad : \quad f(-x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}\},$$

$$U' = \{g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad : \quad g(-x) = -g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Demostrar que U y U' son subespacios vectoriales de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$—de las funciones pares y las funciones impares, respectivamente—. Probar además que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = U \oplus U'$. Dada $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\quad f(x) = x^2 + 2x + 1$, encontrar las dos únicas $h \in U$, $g \in U'$ tales que $f = h + g$.

16. En $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios

$$U_1 = L(\{e_1, e_3\}), \qquad U_2 = L(\{e_2\}), \qquad U_3 = L(\{e_2 + e_3\}),$$

siendo e_1, e_2, e_3 los vectores de la base usual de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$. Demostrar que $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2 + U_3$, y que además,

$$U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \{0\}.$$

Sin embargo, ver que esta suma no es directa.

17. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, con $\dim_{\mathbb{K}} V = n$. Sea U un subespacio suyo, con $\dim_{\mathbb{K}} U = n$. Probar que necesariamente es $U = V$.

18. Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión n. ¿Se puede asegurar que para cada $h \in \{0, \ldots, n\}$ existe un subespacio vectorial de V con dimensión h?

19. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y sea $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ una base suya. Consideremos $y \in V$ que se pondrá

$$y = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i,$$

con $b_i \in \mathbb{K}$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Probar que $\mathcal{B}_j = (\mathcal{B} - \{x_j\}) \cup \{y\}$ es una base de V si y sólo si el escalar b_j es no nulo.

20. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y sean $H, H' \subseteq V$. Encontrar una condición necesaria y suficiente para que $L(H) = L(H')$. En el caso particular $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $H = \{(1,0,1),(1,1,-1)\}, H' = \{(2,1,0),(0,-{}^1\!/_2,1)\}$, probar que $L(H) = L(H')$.

21. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo. En $\mathbb{R}[x](\mathbb{R})$, se considera el subconjunto
$$W = \left\{ a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} \in \mathbb{R}[x] \quad : \quad \sum_{i=0}^{n-1} a_i = 0 \right\}.$$
¿Es W un subespacio vectorial de $\mathbb{R}[x]$? En caso afirmativo, dar una base de W.

22. Determinar una base del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ dado por
$$U = \left\{ (a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{rcl} a_1 & = & a_2 - 3a_3 \\ a_3 & = & a_4 \end{array} \right\},$$
y completarla hasta una base de $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$. Calcular también un subespacio suplementario de U y una base del espacio cociente $\mathbb{R}^4/U$.

23. Consideremos los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$
$$U = L(\{(1,2)\}), \quad U' = L(\{(0,1)\}), \quad U'' = L(\{(2,0)\}).$$
Probar que $U' \neq U''$ y que $\mathbb{R}^2 = U \oplus U' = U \oplus U''$. Extraer consecuencias.

24. Se consideran en $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ los subespacios
$$U = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a+b+c = 0\}, \quad W = L(\{(1,2,3)\}).$$
Demostrar que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

25. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y sean U_1 y U_2 dos subespacios de $V(\mathbb{K})$. Si $\{x_1,\ldots,x_m\}$ es una base de U_1 y $\{x'_1,\ldots,x'_p\}$ una base de U_2, entonces demostrar que
$$\begin{array}{lcl} V = U_1 + U_2 & \Longleftrightarrow & L(\{x_1,\ldots,x_m,x'_1,\ldots,x'_p\}) = V, \\ V = U_1 \oplus U_2 & \Longleftrightarrow & \{x_1,\ldots,x_m,x'_1,\ldots,x'_p\} \text{ es una base de } V. \end{array}$$

26. Sea $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ y $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base ordenada usual de $\mathbb{R}^3$. Sea considera el vector $x = e_1 + e_2 + e_3$. Encontrar una base ordenada B' en la que x tenga coordenadas $(1, 0, 0)$. La misma pregunta con coordenadas $(-1, 0, 1)$.

27. Sea $V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \text{ grado}(p(x)) \leq 2\}$. Demostrar que V es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}[x]$. Se consideran $B = (1, x, x^2)$, $B' = (1, 1 + x, 1 + x + x^2)$. Demostrar que son bases ordenadas de V y encontrar las ecuaciones del cambio de base.

28. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y sea $H = \{x_1, \ldots, x_m\} \subset V$ tal que $L(H) = V$ y además que cumple la propiedad de que al quitarle uno cualquiera de sus vectores, el subconjunto de H que resulta ya no es un sistema de generadores. Probar que H es una base.

29. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Demostrar, usando sólo las definiciones, que si $\{x_1, \ldots, x_m\}$ es un subconjunto de V linealmente independiente e $\{y_1, \ldots, y_n\}$ es un sistema de generadores de V, entonces $m \leq n$. Usar esto para probar del teorema de la base.

30. Sea S un subconjunto del espacio vectorial $\mathbb{R}[x](\mathbb{R})$, de manera que no hay en S dos polinomios de igual grado. Probar que S es linealmente independiente. Sea V el subespacio de $\mathbb{R}[x]$ de los polinomios de grado menor o igual que n. Si $\mathcal{B} = \{p_1(x), \ldots, p_{n+1}(x)\} \subset V$ con $\text{grado}(p_j(x)) = j - 1$, $1 \leq j \leq n + 1$, probar que $\mathcal{B}$ es una base de V.

31. Se considera el espacio vectorial $V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \text{ grado}(p(x)) \leq 3\}$. Probar que $U = \{p(x) \in V : p'(1) = 0\}$ es un subespacio de V. Encontrar una base ordenada de ${}^{V}/_{U}$ y en ella calcular las coordenadas de $(1 + x) + U$.

32. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $B = (x_1, \ldots, x_n)$ una base ordenada de V, y x el vector de V de coordenadas $(a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n)$ en B. Encontrar un subespacio U de V y una base ordenada B' de V/U de manera que $x + U$ tenga coordenadas $(a_1, \ldots, a_m)$ en B'.

33. Sean U y W dos subespacios de un espacio vectorial $V(\mathbb{K})$. Probar que si $\dim_{\mathbb{K}} U + \dim_{\mathbb{K}} W > \dim_{\mathbb{K}} V$, entonces existe un vector no nulo en $U \cap W$. ¿Es cierto el recíproco?

34. Sean U y W dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial $V(\mathbb{K})$, tales que $U \cap W = \{0\}$. Probar que
$$V = U \oplus W \quad \Longleftrightarrow \quad \dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} U + \dim_{\mathbb{K}} W.$$

35. En $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ se definen las funciones
$$f_n(x) = e^{\alpha_n x}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$
donde n es cualquier número natural, y $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales, todos distintos entre sí. Probar que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es linealmente independiente.

36. Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión n, y sea $x \in V$ no nulo. Tomemos $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}$ con algún $a_i \neq 0$. Demostrar que es posible encontrar una base ordenada de V donde x tenga coordenadas $(a_1, \ldots, a_n)$.

37. Sean W_1, W_2 subespacios de un espacio vectorial $n-$dimensional $V(\mathbb{K})$, tales que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Probar que existe un subespacio U de V tal que $V = W_1 \oplus U$ y $W_2 \subseteq U$. Demostrar también que existe un subespacio vectorial W_3 de V verificando $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$.

38. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, deseamos completar $w_1 = (1, 1, 0)$, $w_2 = (0, 1, 1)$ con un vector w_3 de modo que (w_1, w_2, w_3) sea una base ordenada, y que en ella, el vector $w = (1, 1, 1)$ tenga coordenadas $(0, 1, 2)$. Hallar w_3.

39. Sea (x_1, x_2, x_3) una base ordenada de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$. Se consideran las bases ordenadas
$$\begin{array}{rcl} \overline{B} & = & (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3), \\ B' & = & (x_1 + 2x_2 + x_3, x_2 + 2x_3, x_1 + x_2). \end{array}$$
Sea $x \in \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ el vector de coordenadas $(0, 1, 3)$ respecto de $\overline{B}$. Hallar las coordenadas de x respecto de B'.

40. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ generado por los vectores $(1,0,1,1)$ y $(0,1,0,0)$. Calcular una base ordenada de $\mathbb{R}^4/W$, y las coordenadas del vector $(2,2,3,1)+W$ en dicha base ordenada.

41. Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial y sean U, W dos subconjuntos de V. Supongamos que tanto $U+W$ como $U\cap W$ son subespacios de V. ¿Han de ser necesariamente U y W subespacios de V?

