Tema 7:

ESPACIOS AFINES

Prof. Rafael López Camino
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Material docente para el alumno
Asignatura: Geometría I. Curso 2003/04
Licenciatura: Matemáticas (Plan 2000)
Universidad de Granada

1. Probar que
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x = 1+\lambda, y = -1-\lambda+\mu, z = 2, \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$$
es un subespacio afín, hallar su dimensión y ecuaciones cartesianas.

2. Hallar las ecuaciones cartesianas de la intersección y suma de los siguiente subespacios afines de $\mathbb{R}^4$:
$$S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x-2y = 1, y-2z = -1\}$$
$$T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x-y-z-t = 1, x-3y = 2, z-2t = 0\}.$$

3. Hallar un conjunto de puntos afinmente independientes que generen cada uno de los siguientes subespacios:
   (a) $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 2x-y = -2\}$.
   (b) $L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2x-y = -2\}$.
   (c) $L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2x-y = -2, y-2z = -2\}$.
   (d) $L = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; 2x-y = -2, y-2z = -1\}$.
   (e) $L = P+U \subset \mathbb{R}^4$, donde $P = (1,0,0,0)$ y $U =< (1,0,0,0) >$.

4. Se considera en $\mathbb{R}^4$ las variedades lineales $S =< \{P_0,P_1,P_2,P_3\} >$, $T = Q+U$, donde $P_0 = (0,1,1,1)$, $P_1 = (-1,0,0,1)$, $P_2 = (0,0,0,0)$, $P_3 = (-2,0,0,2)$, $Q = (0,0,1,0)$ y $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; y-z = 0, x-2t = 0\}$. Hallar dimensiones de $S\cap T$, $S+T$. Hallar las ecuaciones cartesianas de $S+T$ y $S\cap T$.

5. Hallar las ecuaciones cartesianas del plano paralelo a $S =< \{P_0,P_1,P_2\} >$, $P_0 = (1,0,1)$, $P_1 = (0,0,0)$, $P_2 = (0,0,-1)$ que pasa por el punto $(1,1,1)$.

6. Se considera el plano $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x-y = 2\}$ y las rectas $L_1 =< P_0,P_1 >$, $L_2 =< P_1,P_2 >$, con $P_0 = (1,0,1)$, $P_1 = (0,0,0)$, $P_2 = (0,1,-1)$. Hallar, si es posible, una recta $< P,Q >$ con $P \in L_1$ y $Q \in L_2$ y que sea paralela al plano S. Hallar la recta paralela a $< P,Q >$ contenida en S.

7. Se considera el plano $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y = 2\}$ y los puntos $P_0 = (1, 0, 2)$, $P_1 = (0, 0, -1)$, $P_2 = (\lambda, 1, -1)$, donde λ es un parámetro real. Hallar los valores λ para los cuales estos tres puntos son afinmente independientes. Estudiar si es posible hallar un número λ tal que el plano generado por P_0, P_1 y P_2 sea paralelo a S.

8. Se consideran los puntos $P_0 = (1, 0, 0, 0)$, $P_1 = (0, 1, 0, 0)$, $P_2 = (0, 0, 1, 0)$, $P_3 = (0, 0, 0, 1)$. Probar que son afinmente independientes. Dado el punto $Q = (0, a, a, 1)$, donde $a \in \mathbb{R}$, hallar los valores de a para que $Q \in < \{P_0, P_1, P_2, P_3\} >$.

9. Hallar las ecuaciones cartesianas del subespacio $L = P + U \subset \mathbb{R}^3$, $P = (1, 0, -1)$, $U =< (1, 0, 1) >$ respecto del sistema de referencia afín
$$\{(1, 0, -1), B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}\}.$$

10. Sea S un subespacio afín de $\mathbb{R}^n$. Estudiar bajo qué condiciones se tiene $S + S = S$.

11. Sean S y T dos variedades lineales tales que $S + T = S$. ¿Es cierto que $T \subset S$? En caso contrario, poner un contraejemplo.

12. Hallar las ecuaciones del cambio de coordenadas afines de los siguientes sistemas de referencia afín de $\mathbb{R}^3$:
$$\mathcal{R}_1 = ((1, 0, 0), B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}).$$
$$\mathcal{R}_2 = ((1, 0, 1), B' = \{(0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}).$$
Hallar las ecuaciones cartesianas en ambos sistemas de referencia del subespacio $S =< \{P_0, P_1\} >$, donde $P_0 = (1, 0, 0)$, $P_1 = (1, 0, 1)$.

13. Se considera la recta $L =< P, Q >$, donde $P = (1, 1, 1)$ y $Q = (0, 1, 1)$. Hallar las ecuaciones cartesianas de la recta L. Respecto del sistema de referencia afín $\{(1, 0, 0), B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$, hallar las ecuaciones de la recta paralela a L que pasa por el punto $(0, 0, 0)$.

14. Dadas las rectas
$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-\lambda}{-1}$$
$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{1}$$
hallar λ para que se corten y hallar la ecuación del plano que determinan.

15. Se consideran los siguientes tres planos de $\mathbb{R}^3$:
$$x+y+z=1 \quad \lambda x+y+z=1 \quad x+\lambda y+\mu z=1$$
Hallar los valores de λ y μ para que
   (a) tengan un único punto común.
   (b) tengan una única recta común.
   (c) se corten dos a dos.

16. Estudiar la posición relativa de los siguientes subespacios afines:
   (a) En $\mathbb{R}^4$, $2x_1-x_3+2x_4=-3$ y $\lambda x_1-2x_2+2x_3+2x_4=6$.
   (b) En $\mathbb{R}^3$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-2}{5}$ y $x+3=\frac{y-4}{3}=\frac{z+8}{3}$.
   (c) En $\mathbb{R}^3$, $\frac{x+5}{\alpha}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{\beta}$ y $\frac{x+3}{\lambda}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+8}{\mu}$.