Tema 6:

ISOMETRIAS DE ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS

Prof. Rafael López Camino
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Material docente para el alumno
Asignatura: Geometría I. Curso 2003/04
Licenciatura: Matemáticas (Plan 2000)
Universidad de Granada

1. Se considera la base $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0,1,0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$. Hallar la expresión matricial $M(f, B, B)$ de la isometría que lleva la base B en la base usual. Comprobar que dicha matriz es ortogonal.

2. Calcular la expresión matricial de la simetría de $\mathbb{R}^3$ respecto del plano $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x-y=0\}$. Lo mismo, pero respecto de la recta $L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; y+2z=0, 2x-y=0\}$. Hallar la composición de ambas isometrías y clasificarla.

3. Sea $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x-y=0, z-t=0\}$ y $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; y-z=0, x+y+z+t=0\}$. Hallar una isometría d $\mathbb{R}^4$ que lleve U en W.

4. Se considera la base $B = \{(1,1),(1,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y el endomorfismo $M(f,B,B) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Probar que es una isometría y clasificarla.

5. Hallar los valores propios, subespacios propios del endomorfimo de $\mathbb{R}^3$ dado por $f(x,y,z) = (x+z, y+z, 2z)$.Estudiar si f es diagonalizable.

6. Lo mismo que el ejercicio anterior pero con el endomorfimo de $\mathbb{R}^2$ dado por $f(x,y) = (2x+y, x+2y)$.

7. Diagonalizar por congruencias la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

8. Lo mismo que el ejercicio anterior, pero con la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

9. Hallar la expresión matricial respecto de la base usual de la simetría respecto de la recta de $\mathbb{R}^3$ dada por $L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x-y-z=0, x-2y-2z=0\}$.

10. Hallar la expresión matricial respecto de la base usual de la simetría respecto del plano $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 3x-y=0\}$.

11. Probar que la métrica de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

es euclídea. Hacer el ejercicio anterior con esta métrica.

12. Se considera la métrica euclídea de $\mathbb{R}^2$ dada por

$$< (x, y), (x', y') = 2xx' + xy' + x'y + 2yy'.$$

Hallar una base ortonormal para esta métrica. Se considera el giro de ángulo $\pi/4$ respecto de esta base. Hallar la expresión matricial respecto de la base usual de $\mathbb{R}^2$ de dicha isometría.

13. Respecto de la métrica anterior, hallar la expresión matricial respecto de la base usual de la simetría respecto de la recta $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - 3y = 0\}$.

14. Clasificar las siguientes isometrías de $\mathbb{R}^3$ (se dan las expresiones matriciales respecto de la base usual):

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{\sqrt{2}+2}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} \end{pmatrix}$.

15. Hallar la expresión matricial respecto de la base usual del giro de ángulo $\pi/6$ respecto de la recta $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y - z = 0, x - 2y - 2z = 0\}$.

16. Se considera la composición de la simetría respecto del plano $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2z = 0\}$ seguido del giro de ángulo $\pi/2$. Hallar la expresión matricial de dicha isometría respecto de la base usual.

17. ¿Qué isometría se obtiene al componer dos simetrías de respecto de dos rectas de $\mathbb{R}^3$? ¿Y si fueran dos simetrías respecto de dos planos? ¿Y si fuera una simetría respecto de un plano y una simetría respecto de una recta contenida en dicho plano?

18. ¿Qué isometría se obtiene al componer un giro de ángulo θ respecto de una recta L de $\mathbb{R}^3$ y una simetría respecto del plano $L^\perp$? ¿Y si fuera respecto de un giro de ángulo θ respecto de una recta L de $\mathbb{R}^3$ y una simetría respecto de L?