Tema 5:

ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS

Prof. Rafael López Camino
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Material docente para el alumno
Asignatura: Geometría I. Curso 2003/04
Licenciatura: Matemáticas (Plan 2000)
Universidad de Granada

1. En $\mathbb{R}^2$ se considera la métrica g definida por
$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Probar que g es euclídea y encontrar una base ortonormal de $(\mathbb{R}^2, g)$.

2. Demostrar que para toda matriz simétrica $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ se cumple
$$(\text{traza}(A))^2 \leq n \ \text{traza}(A^2),$$
siendo la igualdad cierta si y sólo si $A = aI_n$ para algún $a \in \mathbb{R}$.

3. Demostrar usando la desigualdad de Schwarz que si $a_1, \ldots, a_n$ son números reales cualesquiera, entonces
$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \leq n \sum_{\imath=1}^n a_i^2,$$
y que la igualdad es cierta si y sólo si $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

4. En $\mathbb{R}^3$ con la métrica usual hallar una base ortonormal aplicando el método de Gram-Schmidt a partir de la base $B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$.

5. En el espacio euclídeo usual $\mathbb{R}^3$, obtener una base ortonormal aplicando el procedimiento de Gram-Schmidt a la base $\{(1,0,1), (1,2,0), (0,2,3)$. Respecto de la base obtenida, calcular las ecuaciones cartesianas $U^\perp$, siendo $U =< (1,0,1), (0,1,0) >$.

6. Sean U y U' subespacios vectoriales de un espacio vectorial V tales que $V = U \oplus U'$. Encontrar una métrica euclídea g en V tal que $U' = U^\perp$.

7. Se considera en $\mathbb{R}^3$ la base $B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ y la métrica g donde B es una base ortonormal. Se considera el subespacio $U =< (1,0,1) >$. Hallar las ecuaciones cartesianas de U y $U^\perp$ respecto de la base B.

8. En $\mathbb{R}^3$ con la métrica usual, se considera el subespacio $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x - z = 0\}$. Hallar las proyecciones ortogonales sobre U y sobre $U^\perp$.

9. En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual se considera
$$U = <(1,-1,1,-1),(1,1,1,1),(1,-1,-1,-1)> .$$
Hallar una base ortonormal y las ecuaciones cartesianas de $U^\perp$. Hallar la proyección ortogonal sobre U.

10. En el ejercicio anterior, hallar la distancia del vector $(0,0,0,1)$ a los subespacios U y $U^\perp$.

11. En el espacio vectorial de las funciones polinómicas de grado menor o igual que 2 y el producto escalar $<p(x),q(x)>=\int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$, se consideran los vectores $e_1=x+3$ y $e_2=x^2-4$. Hallar el ángulos que forman ambos vectores. Hallar un vector e_3 tal que $e_3 \in <e_1,e_2>^\perp$. Calcular una base ortonormal a partir de $\{e_1,e_2,e_3\}$.

12. En el espacio anterior, hallar la distancia del polinomio $1+x^2$ al subespacio $<1-x, x^2+x+1>$.

