Tema 3:

MATRICES

Prof. Rafael López Camino
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Material docente para el alumno
Asignatura: Geometría I. Curso 2003/04
Licenciatura: Matemáticas (Plan 2000)
Universidad de Granada

1. Se consideran V_1, V_2 dos espacios vectoriales, y $B_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$, $B_2 = \{y_1, y_2\}$ bases de V_1 y V_2 respectivamente. Se consideran las aplicaciones lineales f y g definidas por

$$\begin{array}{rccc} f: & V_1 & \to & V_2 \\ & x_1 & \longmapsto & y_1 - y_2 \\ & x_2 & \longmapsto & y_2 \\ & x_3 & \longmapsto & y_1 + 2y_2 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rccc} g: & V_2 & \to & V_1 \\ & y_1 & \longmapsto & x_1 - x_2 \\ & y_2 & \longmapsto & x_1 - x_3 \end{array}$$

   Hallar las siguientes matrices: $M(f, B_1, B_2)$, $M(g, B_2, B_1)$, $M(g \circ f, B_1)$, $M(f \circ g, B_2)$.

2. Sean V_1,V_2 y B_1 y B_2 como en el problema precedente. Se considera la aplicación lineal h dada por

$$h(x_1) = y_1 - y_2, \quad h(x_2) = y_1, \quad h(x_3) = 2y_1 - y_2.$$

   Hallar $M(h, B_1, B_2)$, y bases del núcleo e imagen de h.

3. Lo mismo que el problema anterior para $f : V_1 \to V_2$ y $B_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$, $B_2 = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, donde f viene definida por

$$\begin{array}{rcl} f(x_1) & = & y_1 + y_2, \\ f(x_1 - x_3) & = & y_2, \\ f(x_2 - x_3) & = & 2y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4. \end{array}$$

4. Hallar la matriz en la base usual de $\mathbb{R}^3$ de un endomorfismo f definido por la condición de que f, restringida al plano de ecuación $x + y + z = 0$, es una homotecia de razón 3; y que $f(0, 0, -1) = (10, -5, -3)$.

5. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(1, 0, 1) = (0, 1)$, $f(0, 0, -1) = (1, 1)$, $f(2, 1, 1) = (1, 0)$.

   a) Hallar la matriz de f respecto de las bases usuales de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

   b) Hallar la matriz de f respecto de las bases $B = \{(1, 0, 1), (0, 0, -1), (2, 1, 1)\}$, $B' = \{(0, 1), (1, 0)\}$.

c) Lo mismo del apartado anterior respecto de las bases

$$\overline{B} = \{(1,0,-1),(0,0,1),(2,1,0)\} \qquad \overline{B'} = \{(2,0),(0,2)\}$$

:

6. Supongamos que $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal cuya matriz en las bases $B_1 = \{x_1,x_2,x_3\}$, $B_2 = \{y_1,y_2\}$ es

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calcular la matriz de f respecto de las bases $\overline{B_1} = \{x_2+x_3, x_1+x_3, x_1+x_2\}$, $\overline{B_2} = \{\frac{1}{2}(y_1+y_2), \frac{1}{2}(y_1-y_2)\}$.

7. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios $U = L(\{(1,1,1)\})$ y $W = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3; a+b+c=0\}$.

a) Encontrar un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ cuyo núcleo sea U y cuya imagen sea W y hallar la matriz de f respecto de la base usual de $\mathbb{R}^3$.

c) Elegir una base B' en $\mathbb{R}^3/\mathrm{Ker}(f)$, y calcular la matriz de la aplicación lineal

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3/\mathrm{Ker}(f) & \to & \mathbb{R}^3 \\ x+\ \mathrm{Ker}(f) & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

con respecto a ésta y a la base B de $\mathbb{R}^3$.

8. Considerando matrices cuadradas reales de orden 2, probar mediante contraejemplos que, en general, no son ciertas las igualdades siguientes:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2\cdot A\cdot B + B^2, \qquad (A-B)\cdot(A+B) = A^2 - B^2.$$

9. Supongamos que A es una matriz cuadrada de orden n, que verifica la ecuación

$$A^2 + A + I_n = 0.$$

Probar que A es regular.

10. Dada una matriz cuadrada A, se define su traza, traza(A), como la suma de los elementos de su diagonal, es decir,

$$\text{traza}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}, \qquad \text{siendo } A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Demostrar que si A y B son matrices cuadradas de orden n y $a \in \mathbb{R}$, entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \text{traza}(A+B) &= \text{traza}(A) + \text{traza}(B), \\ \text{traza}(a \cdot A) &= a \cdot \text{traza}(A), \\ \text{traza}(A \cdot B) &= \text{traza}(B \cdot A). \end{aligned}$$

Demostrar que dos matrices semejantes tienen la misma traza, pero que el recíproco es falso; más aún, que si dos matrices tienen el mismo rango y la misma traza no tienen porqué ser semejantes. A partir de esto, definir la traza de un endomorfismo. Calcular la traza del endomorfismo f de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ dado por

$$f(a,b) = (a+b, a-b), \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

11. Para cada matriz regular P de orden n, se considera la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & P^{-1} \cdot A \cdot P. \end{array}$$

Probar que es un automorfismo del espacio vectorial $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

12. Sea A una matriz cuadrada de orden n tal que

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad A \cdot B = B \cdot A.$$

Probar que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $A = a \cdot I_n$.

13. Se considera $f \in \text{End}(V)$, $dim(V) = n$, tal que existe un vector $x_0 \in V$ con la propiedad

$$f^{n-k}(x_0) \neq 0, \quad \forall k = 1, \ldots, n-1, \qquad f^n(x_0) = 0.$$

Probar que $\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\}$ es una base de V, y calcular la matriz de f respecto esta base.

14. Para cada matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fija, se considera la aplicación

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & X & \longmapsto & A \cdot X. \end{array}$$

Probar que F es lineal, y encontrar una base B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que

$$M(F,B) = \begin{pmatrix} A & & & \\ & \ddots & n & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{pmatrix}_{n^2 \times n^2}.$$

Probar también que $\text{traza}(F) = n \cdot \text{traza}(A)$.

15. Sea $f \in \text{End}_{\mathbb{R}} V$, $dim(V) = 2$, tal que $f \circ f = 0$. Demostrar que $f = 0$, o es posible encontrar una base B de V tal que

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

—Indicación: Probar que si $f(x) \neq 0$, entonces $\{f(x), x\}$ es linealmente independiente—. Generalizar a mayores dimensiones. A partir de esto, encontrar todas las matrices cuadradas reales X de orden 2, tales que $X^2 = 0$.

16. Sean A y B matrices semejantes. Probar que si A es regular, entonces B también lo es, y que si A verifica la ecuación

$$a \cdot X^2 + b \cdot X + c \cdot I_n = 0, \quad \text{donde } a, b, c \in \mathbb{R},$$

entonces B también es solución de la misma.

17. Sea A una matriz cuadrada de orden n. Probar que $A^2 = I_n$ si y sólo si $(A - I_n) \cdot (A + I_n) = 0$. Si tomamos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $B^2 = B$, probar que $A = 2 \cdot B - I_n$ satisface $A^2 = I_n$.

18. Sea A una matriz cuadrada de orden n. Diremos que A es triangular superior si todos los escalares a_{ij} de A con $i < j$ son nulos; A es triangular inferior si todos los a_{ij} de A con $i > j$ son nulos; y A es diagonal si todos los a_{ij} de A con $i \neq j$ son nulos. Llamemos $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}^0$ y $\mathcal{D}$ a los subconjuntos de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de matrices triangulares superiores, triangulares inferiores y diagonales. Demostrar que los tres son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, y que
$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{T}_0 + \mathcal{T}^0 + \mathcal{D}.$$
Estudiar el comportamiento de estos tres conjuntos de matrices frente al producto.

19. Demostrar que el determinante de una matriz triangular superior (o inferior) se obtiene como el producto de los elementos de su diagonal. Encontrar una condición necesaria y suficiente para que una matriz regular superior (o inferior) sea regular, en términos de los elementos de su diagonal. Dar una expresión explícita para la matriz inversa de una matriz diagonal que sea regular.

20. Sea $f \in End(V)$. Supongamos que existen subespacios vectoriales U, W de V tales que $V = U \oplus W$ y $f(U) \subset U$, $f(W) \subset W$. Llamaremos $f_1 : U \to U$, $f_2 : W \to W$ a las restricciones de f a U y a W, respectivamente, esto es,
$$f_1(x) = f(x),\ x \in U, \qquad\qquad f_2(y) = f(y),\ y \in W.$$
Demostrar que $\det f = (\det f_1)(\det f_2)$. Aplicar esto para demostrar que dadas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, se tiene que
$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & C \end{array} \right) = (\det A)(\det C).$$

21. Sean V y V' dos espacios vectoriales. Dados $f \in End(V)$, $f' \in End(V')$, demostrar que la aplicación de $V \times V'$ en sí mismo dada por
$$(x, x') \longmapsto (f(x), f'(x')),$$
es un endomorfismo del espacio vectorial $V \times V'$. Aplicar el problema anterior para demostrar que su determinante es $(\det f)(\det f')$.

22. Se considera un espacio vectorial V de dimensión n y $f \in End(V)$. Supongamos que existe un subespacio vectorial U de V tal que $f(U) \subset U$. Sea

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{f}: & V/U & \to & V/U \\ & x+U & \longmapsto & f(x)+U \end{array}$$

i) Demostrar que $\widetilde{f}$ es una aplicación lineal.

ii) Probar que $\det f = (\det f_1)(\det \widetilde{f})$, donde $f_1 : U \to U$ es la restricción de f a U, esto es, $f_1(x) = f(x), x \in U$.

iii) Aplicar lo anterior para probar que dadas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ y $C \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, se tiene que

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = (\det A)(\det C).$$

23. Calcular los determinantes de las siguientes matrices reales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix},$$

y generalizar a matrices de orden $n \in \mathbb{N}$.

24. Demostrar que si $A = (a_{ij})_{i,j}$ es una matriz antisimétrica de orden 4, se tiene que $\det A = (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2$.

25. Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

26. Usar determinantes para calcular rangos y con ello ver si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^4$ son o no linealmente independientes:

i) $\{(1,-1,2,0),(1,0,1,2),(1,0,2,1),(0,-1,1,-2)\}$,

ii) $\{(1,1,-1,1),(1,-1,1,1),(-1,1,1,-1),(1,1,-1,-1)\}$.

27. Discutir y resolver los siguientes sistemas sobre $\mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{rcr} 3x_1-2x_2+x_3 & = & 1 \\ x_1+4x_2-5x_3 & = & 3 \\ -x_1+3x_2+2x_3 & = & -4 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcr} x_1-3x_2+x_3 & = & 1 \\ 2x_1 \qquad -3x_3 & = & 4 \\ x_1+x_2+2x_3 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

28. Discutir según los distintos valores del parámetro real a el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} ax_1+x_2+x_3+x_4 & = & 1 \\ x_1+ax_2+x_3+x_4 & = & a \\ x_1+x_2+ax_3+x_4 & = & a^2 \\ x_1+x_2+x_3+ax_4 & = & a^3 \end{array}\right\}$$

Resolver para algún valor de a en el que el sistema sea compatible.

29. Se consideran los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^5$

$$\begin{array}{rcl} U & = & L\left(\{(1,0,-1,2,1),(0,1,1,2,0),(1,1,0,4,1)\}\right), \\ W & = & L\left(\{(2,1,-1,6,2),(1,1,2,1,3),(1,1,1,1,-1),(1,0,0,0,1)\}\right). \end{array}$$

Hallar las ecuaciones cartesianas $U\cap W$ y de $U+W$.

30. En un espacio vectorial V se consideran una base $B=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ y dos subespacios vectoriales U,W, el primero dado por

$$U=L\left(\{u_1-u_2+3u_4,u_1+2u_2+3u_3+4u_4,u_1-7u_2-6u_3+u_4\}\right),$$

mientras que W viene definido por las ecuaciones cartesianas

$$\left.\begin{array}{rcl} b_1+b_2+b_3 & = & 0 \\ 3b_2+b_3+b_4 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Calcular las ecuaciones cartesianas de $U\cap W$ y de $U+W$.

31. Encontrar, si es posible, un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ que cumpla

$$f(1,0,0)=(1,0,0), \quad \det f=-1, \quad \mathrm{traza}(f)=1.$$

