Tema 2:

APLICACIONES LINEALES

Prof. Rafael López Camino
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Material docente para el alumno

Asignatura: Geometría I. Curso 2003/04

Licenciatura: Matemáticas (Plan 2000)

Universidad de Granada

1. Decidir cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales:

   a) $f(x,y,z)=x-2z$ de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}$,

   b) $f(x,y,z)=xy+yz$ de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}$,

   c) $f(x,y)=(y-x,x-y,y-x)$ de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$,

   d) $f(x,y)=(x+y,x+2,x-y)$ de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$.

2. Sea considera la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)=(x,0,z)$. Hallar una base de su núcleo y su imagen.

3. Sea $f:V\to V$ una aplicación linal en un espacio vectorial V, con la propiedad $f\circ f=f$. Demostrar que $V=\operatorname{Ker}(f)\oplus\operatorname{Im}(f)$.

4. Sea V un espacio vectorial real y f un endomorfismo suyo tal que $f\circ f=-1_V$. Probar que la dimensión de V es par.

5. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V. Definimos el *conjunto de elementos invariantes por* f, como $\operatorname{Inv}(f)=\{x\in V; f(x)=x\}$. Demostrar que $\operatorname{Inv}(f)$ es un subespacio vectorial de V.

6. Se considera en $\mathbb{R}^3$ los subespacios $U=\{(a,b,0);a,b\in\mathbb{R}\}$, $W=\{(0,c,d);c,d\in\mathbb{R}\}$. Hallar un automorfismo de $\mathbb{R}^3$ de manera que $f(U)=W$. ¿Es posible encontrar más de un automorfismo en estas condiciones?

7. Probar que la aplicación $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x,2x+y)$ es un automorfismo, y calcular su inversa.

8. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V. Probar que son equivalentes los siguientes enunciados:

   (a) $f\circ f=0$.

   (b) $Im(f)\subset Ker(f)$.

9. Si existe un endomorfismo f en un espacio vectorial V tal que $\dim\operatorname{Ker}(f)=\dim\operatorname{Im}(f)$, probar que la dimensión de V es par. ¿Puede ser f un automorfismo?

10. Sean U, W dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial V tal que $V = U \oplus W$. Se definen las aplicaciones
$$p_U : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ u+w & \longmapsto & u \end{array}, \qquad p_W : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ u+w & \longmapsto & w \end{array},$$
donde dado $x \in V$, $u+w$ denota la descomposición única de x en suma de un elemento en U y otro de W. Demostrar que ambas aplicaciones son lineales, y calcular sus núcleos e imágenes. Demostrar también que
$$p_U \circ p_W = p_W \circ p_U = 0, \quad p_U \circ p_U = p_U, \quad p_W \circ p_W = p_W.$$

11. Se considera un endomorfismo f de un espacio vectorial V con la propiedad $f \circ f = 1_V$. Demostrar que f es un automorfismo, y que $V = U \oplus W$, siendo
$$U = \{x \in V \ : \ f(x) = x\}, \quad \text{y} \quad W = \{x \in V \ : \ f(x) = -x\}.$$
(Comprobar previamente que tanto U como W son subespacios de V). Ayuda: utilizar el problema 3, construyendo a partir de f un endomorfismo g de V de modo que $g \circ g = g$, y aplicar a g el resultado de dicho problema.
Particularizar al caso $V = \mathbb{R}^2$ y $f(a, b) = (a, -b)$.

12. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios dados por
$$\begin{array}{rcl} U & = & \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \begin{array}{c} x + 2y + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{array} \right\}, \\ W & = & L\left(\{(1, 0, 1), (1, 1, 0)\}\right). \end{array}$$
Encontrar, si es posible, un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ que verifique
$$f(W) = U, \qquad \dim \mathrm{Ker}(f) = 2.$$

13. Sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales. Probar que f es lineal si y sólo si su grafo,
$$G(f) = \{(x, f(x)) \in V \times V'; x \in V\}$$
es un subespacio vectorial de $V \times V'$. En este último caso, hallar la dimensión de $G(f)$.