Tema 9:

ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO. MOVIMIENTOS RÍGIDOS

Prof. Rafael López Camino
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Material docente para el alumno
Asignatura: Geometría I. Curso 2003/04
Licenciatura: Matemáticas (Plan 2000)
Universidad de Granada

 Se prohibe cualquier reproducción sin permiso del autor

1 Espacio afín euclídeo

Definición 1.1 *El espacio afín euclídeo es el espacio afín $\mathbb{R}^n$ dotado con la métrica usual $\langle , \rangle$:*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Se define la distancia entre dos puntos $P, Q \in \mathbb{R}^n$ como la distancia vectorial entre ellos, es decir,

$$d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}|.$$

Definición 1.2 *Dos subespacios afines S y T se dice que son ortogonales o perpendiculares si lo son las respectivas variedades de dirección. Se definen las proyecciones ortogonales y simetrías ortogonales como las proyecciones y simetrías respecto de un subespacio y paralelo al subespacio ortogonal.*

De forma análoga a lo que sucedía en el caso vectorial, si $P \in \mathbb{R}^n$ y S es un subespacio afín, se define la distancia de P a S como

$$d(P,S) = \inf\{d(P,Q); Q \in S\}.$$

Se tiene entonces que $d(P,S) = d(P, \pi_S(P))$. Por ejemplo, si S es el hiperplano $\{x \in \mathbb{R}^n; \sum a_i x_i + b = 0\}$, y si $P = (p_1, \ldots, p_n)$, entonces

$$d(P,S) = \frac{|\sum_{i=1}^n a_i p_i + b|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}.$$

Como novedad respecto del caso vectorial, podemos definir la distancia entre dos subespacios afines S y T:

$$d(S,T) = \in \{d(P,Q); P \in S, Q \in T\}.$$

Ahora tenemos

$$d(S,T) = d(P, \pi_W(P)),$$

donde P es un punto cualquiera de S y W es el subespacio afín definido por $W = Q + (\overrightarrow{S} + \overrightarrow{T})$, donde $Q \in T$.

Se prohibe cualquier reproducción sin permiso del autor

2 Triángulos y cuadriláteros

A continuación definimos lo que son triángulos y cuadrilátero en un espacio afín.

Definición 2.1 *Un triángulo en un espacio afín son tres puntos afínmente independientes. Un cuadrilátero son cuatro puntos contenidos en un plano afín y de forma que tres a tres son afínmente independientes. Se define un lado de un triángulo* $\{P_0, P_1, P_2\}$ *como*

$$\overline{P_iP_{i+1}} = \{P_i + \lambda\overrightarrow{P_iP_{i+1}}; \lambda \in [0,1]\}.$$

De forma análoga se define los lados de un cuadrilátero.

Definición 2.2 *Un cuadrilátero* $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ *se llama paralelogramo si* $< P_0, P_1 > \parallel < P_2, P_3 >$ *y* $< P_1, P_2 > \parallel < P_3, P_4 >$.

Consideramos ahora el espacio afín euclídeo. Un paralelogramo se llama *rectángulo* si los lados son dos a dos perpendiculares. Si además, las longitudes de los lados son iguales, se llama *cuadrado*.

En un paralelogramo del espacio afín euclídeo, las longitudes de los lados opuestos coinciden.

Definición 2.3 *Si* P, Q *son dos puntos de un espacio afín, se define el punto medio entre* P *y* Q *como*

$$M = P + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \frac{P+Q}{2}.$$

3 Movimientos rígidos

Definición 3.1 *Un movimiento rígido de* $\mathbb{R}^n$ *es una aplicación afín* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *donde* $\overrightarrow{f}$ *es una isometría.*

Se prohibe cualquier reproducción sin permiso del autor

La definición es equivalente a que $d(P,Q) = d(f(P), f(Q))$, para cualesquiera puntos P y Q. De la misma forma, se dice que f es directo o inverso si lo es $\overrightarrow{f}$.

Si escribimos $f(X) = AX + b$, entonces f es un movimiento rígido si y sólo si $A \in O(n)$.

1. Las traslaciones son movimientos rígidos.
2. Las simetrías ortogonales son movimientos rígidos.
3. La composición de movimientos rígidos es otro movimiento rígido.
4. La aplicación inversa de un movimiento rígido es otro movimiento rígido.

Antes de clasificar los movimientos rígidos del plano y espacio afín euclídeo, estudiamos dos subespacios notables en todo movimiento rígido.

Proposición 3.2 (Subespacio de puntos fijos) *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación afín y sea $P_f = \{X \in \mathbb{R}^n; f(X) = X\}$ el conjunto de puntos fijos (que puede ser un conjunto vacío). Supongamos que $f(X) = AX + b$. Entonces son equivalentes:*

1. $P_f \neq \emptyset$.

2. $r(A - I_n) = r(A - I_n | -b)$.

Si no es vacío, y el rango anterior es m, entonces P_f es un subespacio de dimensión $n - m$ cuya variedad de dirección es $V_1(\overrightarrow{f})$.

Definición 3.3 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación afín. Un subespacio afín S se dice que es invariante por f si $f(S) = S$.*

Por ejemplo, si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una simetría respecto una recta L y paralela a otra recta T, entonces toda recta W paralela a T queda invariante por f ya que si $P \in W$, $\overrightarrow{Pf(P)} \in \overrightarrow{T}$. Por tanto, $f(P) \in P + \overrightarrow{T} = W$, es decir, $f(W) = W$. Observemos que si $\overrightarrow{T} = \langle v \rangle$, $\overrightarrow{f}(v) = -v$.

Destacamos aquel subespacio afín que tiene como variedad de dirección $V_1(\overrightarrow{f})$:

Definición 3.4 *Si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ es una aplicación afín, el conjunto $I_f=\{X\in\mathbb{R}^n;\overrightarrow{Xf(X)}\in V_1(\overrightarrow{f})\}$ se llama subespacio invariante por f.*

Proposición 3.5 (Subespacio invariante) *Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ una aplicación afín y sea $I_f=\{X\in\mathbb{R}^n;\overrightarrow{Xf(X)}\in V_1(\overrightarrow{f})\}$ el subespacio invariante (que puede ser un conjunto vacío). Supongamos que $f(X)=AX+b$. Entonces son equivalentes:*

1. *$I_f\neq\emptyset$.*
2. *$r(A-I_n)=r(A-I_n)^2$.*

Si no es vacío, y el rango anterior es m, entonces I_f es un subespacio de dimensión $n-m$ cuya variedad de dirección es $V_1(\overrightarrow{f})$ y está determinado por $I_f=\{X\in\mathbb{R}^n;(A-I_n)^2X+(A-I_n)b=0\}$.

Recordemos que una isometría g tal que $g\circ g=1_V$ era una simetría respecto de un subespacio U. Concretamente, U era el subespacio propio asociado al valor propio 1, $V_1(g)$, y que $U^\perp=V_{-1}(g)$. En el espacio afín euclídeo el resultado análogo es el siguiente:

Teorema 3.6 *Sea f un movimiento rígido de $\mathbb{R}^n$ tal que $\overrightarrow{f}$ es una simetría ortogonal vectorial. Si el conjunto de puntos fijos P_f de f no es vacío, entonces f es una simetría ortogonal respecto del subespacio P_f.*

Clasificamos los movimientos rígidos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Teorema 3.7 (Plano euclídeo) *Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ un movimiento rígido y denotamos por P_f el conjunto de puntos fijos. Entonces se tiene la siguiente clasificación:*

1. *La aplicación f es un movimiento rígido directo.*

   (a) *$P_f\neq\emptyset$. Entonces f es la* identidad *($\theta=0$), una* simetría central *($\theta=\pi$) o un* giro respecto de un punto *($\theta\neq 0,\pi$).*

 Se prohibe cualquier reproducción sin permiso del autor

(b) $P_f = \emptyset$. *Entonces* f *es una* traslación

2. *La aplicación* f *es un movimiento rígido inverso.*

   (a) $P_f \neq \emptyset$. *Entonces* f *es una* simetría respecto de la recta P_f, *donde* $\overrightarrow{P_f} = V_1(\overrightarrow{f})$.

   (b) $P_f = \emptyset$. *Entonces* f *es una* simetría deslizante*: si* $f(x) = Ax+b$, *entonces* f *es una simetría respecto de una recta* L *(llamada eje), seguida de una traslación con vector de traslación* $v = \overrightarrow{Pf(P)}$, $P \in L$ *llamado vector de deslizamiento.*

	$P_f \neq \emptyset$	$P_f = \emptyset$
directo	identidad, simetría central, giro respecto de un punto	traslación
inverso	simetría respecto de una recta	simetría deslizante

Teorema 3.8 (Espacio euclídeo) *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *un movimiento rígido y denotamos por* P_f *el conjunto de puntos fijos. Entonces se tiene la siguiente clasificación:*

1. *La aplicación* f *es un movimiento rígido directo. En tal caso existe una base ortonormal* $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ *tal que*

$$M(\overrightarrow{f}, B, B) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) $P_f \neq \emptyset$.

      i. *Si* $\overrightarrow{f}$ *es la identidad* ($\theta = 0$), f *es la* identidad.

      ii. *Si* $\theta = \pi$, f *es una* simetría ortogonal respecto de la recta P_f.

      iii. *Si* $\theta \neq 0, \pi$, f *es un* giro de ángulo θ respecto de la recta P_f, *llamada eje del giro.*

(b) $P_f = \emptyset$.

i. *Si* $\theta = 0$, f *es una* traslación.

ii. *Si* $\theta \neq 0$, f *es un movimiento helicoidal de ángulo* θ *respecto de una recta* L *y con paso* $\overrightarrow{Pf(P)}$, $P \in L$.

2. *La aplicación* f *es un movimiento rígido inverso. En tal caso existe una base ortonormal* $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ *tal que*

$$M(\overrightarrow{f}, B, B) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) $P_f \neq \emptyset$.

i. *Si* $\theta = 0$, f *es una* simetría respecto del plano P_f.

ii. *Si* $\theta = \pi$, f *es una* simetría central.

iii. *Si* $\theta \neq 0, \pi$, P_f *es un único punto* c *y* f *es la composición de una reflexión respecto de un plano* Π *seguido de un giro de ángulo* θ *respecto de una recta* L *(*L *y* Π *son perpendiculares). Además* c *es el punto de corte entre* L *y* Π.

(b) $P_f = \emptyset$. *En tal caso,* f *es una* simetría deslizante*: una reflexión respecto de un plano* Π *seguido de una traslación* v*, con* $v = \overrightarrow{Pf(P)}$, $P \in \Pi$.

	$P_f \neq \emptyset$	$P_f = \emptyset$
directo	identidad, simetría respecto de una recta, giro respecto de una recta	traslación, movimiento helicoidal
inverso	simetría respecto de un plano, simetría central, simetría respecto de un plano seguido de un giro respecto de una recta	simetría deslizante

Se prohibe cualquier reproducción sin permiso del autor