Tema 7:

ESPACIOS VECTORIALES AFINES

Prof. Rafael López Camino
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Material docente para el alumno
Asignatura: Geometría I. Curso 2003/04
Licenciatura: Matemáticas (Plan 2000)
Universidad de Granada

1 Espacio afín

Definición 1.1 *Un espacio (vectorial) afín es un espacio vectorial V junto la siguiente operación: si $P, Q \in V$,*

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P.$$

Diremos que P es el origen y Q el extremo del vector $\overrightarrow{PQ} = Q - P$. A los elementos del espacio afín lo llamaremos puntos. Se llama dimensión de V a la dimensión que tiene como espacio vectorial.

La operación afín $\longrightarrow$ tiene las siguientes propiedades:

1. $Q = P + \overrightarrow{PQ}$.
2. $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.
3. Si $P \in V$ y $v \in V$, existe un único punto Q tal que $\overrightarrow{PQ} = v$.
4. $\overrightarrow{PQ} = 0$ si y sólo si $P = Q$.
5. $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$.
6. Si $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$ entonces $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{QB}$.

Definición 1.2 *Un subespacio afín (o variedad lineal) de un espacio afín es un conjunto S de la forma $S = P + U$, donde P es un punto y U es un subespacio vectorial:*

$$P + U = \{P + u; u \in U\}.$$

Al subespacio U se llama variedad de dirección (o subespacio vectorial asociado) de S. También se denota por $\vec{S}$. Se llama dimensión de S a la dimensión de U.

Como consecuencia,

$$\vec{S} = \{\overrightarrow{PQ}; Q \in S\}.$$

Proposición 1.3 *Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *S es un subespacio afín.*
2. *Si $P \in S$, el conjunto $\{\overrightarrow{PQ}; Q \in S\}$ es un subespacio vectorial.*
3. *El conjunto $\{\overrightarrow{PQ}; P, Q \in S\}$ es un subespacio vectorial.*

Proposición 1.4 *Sea V un espacio afín y $S = P + U$, $T = Q + W$ dos subespacios afines. Entonces $S \subset T$ si y sólo si $U \subset W$ y $\overrightarrow{PQ} \in W$. En particular, $S = T$ si y sólo si $\vec{S} = \vec{T}$ y $\overrightarrow{PQ} \in \vec{S}$. Como consecuencia, si S y T son dos subespacios afines tales que $S \subset T$ y tienen la misma dimensión, son iguales.*

Proposición 1.5 *Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es una matriz de rango m y $b \in \mathbb{R}^m$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n; Ax = b\}$ es un subespacio de dimensión $n - m$. Además su variedad de dirección es $\{x \in \mathbb{R}^n; Ax = 0\}$.*

Recíprocamente, si S es un subespacio afín de dimensión $n - m$ de $\mathbb{R}^n$, existe una matriz A de rango m y $b \in \mathbb{R}^m$ tal que $S = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = b\}$. A las m ecuaciones $Ax = b$ se llaman ecuaciones cartesianas de S.

Definición 1.6 *Si p y Q son dos puntos distintos de un espacio afín, se llama la recta que pasa por P y Q al subespacio*

$$< P, Q > := P + < \overrightarrow{PQ} > = \{P + \lambda \overrightarrow{PQ}; \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Proposición 1.7 *En un espacio afín se tiene las siguientes propiedades:*

1. *$P, Q \in < P, Q >$.*
2. *$< P, Q > = < Q, P >$.*
3. *La recta que pasa por dos puntos es un subespacio afín de dimensión 1. Además es el único subespacio afín de dimensión 1 que pasa por ellos.*

4. *Si* $R \in < P, Q >$ *es otro punto, entonces* $< P, R > = < P, Q >$.

5. *Si* $A, B, C \in < P, Q >$, *entonces* $\overrightarrow{AC}$ *y* $\overrightarrow{AB}$ *son linealmente independientes.*

Definición 1.8 *Se considera un conjunto de puntos* $\{P_0, \ldots, P_m\}$ *de un espacio afín* V. *Se llama subespacio afín engendrado por dichos puntos al subespacio*

$$< \{P_0, \ldots, P_m\} > = P_0 + < \overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_m} > .$$

Proposición 1.9 *En un subespacio afín, se tiene las siguientes propiedades:*

1. *En el concepto de* $< \{P_0, \ldots, P_m\} >$ *no depende del punto* P_0 *tomado en dicho conjunto.*

2. $P_i \in < \{P_0, \ldots, P_m\} >$, $0 \leq i \leq m$.

3. *Si* S *es un subespacio afín y* $\{P_0, \ldots, P_m\} \subset S$, *entonces* $< \{P_0, \ldots, P_m\} > \subset S$.

4. $< \{P_0, \ldots, P_m\} > = \bigcap \{S; S$ *es subespacio afín y* $P_i \in S, 0 \leq i \leq m\}$.

Teorema 1.10 *Sea* S *un subepacio afín de dimensión* m. *Entonces existen* $m+1$ *puntos* $\{P_0, \ldots, P_m\}$ *tales que* $S = < \{P_0, \ldots, P_m\} >$. *Además este número no puede ser menor.*

Definición 1.11 *Un conjunto de puntos* $\{P_0, \ldots, P_m\}$ *se dice que son afínmente independientes si el subespacio afín que generan tiene dimensión* m.

Una forma de construir puntos afinmente independientes es la siguiente: sea $P_0 \in V$ y $\{e_1, \ldots, e_m\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes. Entonces $\{P_0, \ldots, P_m\}$, donde $P_i = P_+ e_i$, es un conjunto de puntos afinmente independientes.

Este concepto tiene propiedades análogas al de independencia lineal en un espacio vectorial. Lo mismo sucede para el de subespacio afín generado por un conjunto de puntos. Concretamente,

Por ejemplo,

1. Todo subconjunto de un conjunto de puntos afinmente independientes es afinmente independiente.

2. Si se tiene un conjunto de puntos afinmente independientes, es posible ir añadiendo vectores hasta obtener $n+1$ puntos afinmente independientes ($n =$ dimensiónde V).

3. Si el número m es mayor estricto que n, entonces los puntos nos son afinmente independientes.

2 Intersección y suma de subespacios afines. Paralelismo.

Proposición 2.1 *Si S y T son subespacios afines cuya intersección es no vacía, $S \cap T$ también es un subespacio afín, cuya variedad de dirección $\overrightarrow{S \cap T}$ es $\overrightarrow{S} \cap \overrightarrow{T}$.*

Además $S \cap T \neq \emptyset$ si y sólo si para cada $P \in S$ y $Q \in T$, $\overrightarrow{PQ} \in \vec{S} + \vec{T}$.

Definición 2.2 *Sean S y T dos subespacios afines. Se define la suma de S y T como el conjunto que denotaremos por $S+T$ definido por*

$$S+T = \bigcap \{L; L \textit{ es subespacio afín y } S, T \subset L\}.$$

Teorema 2.3 *Si S y T son dos subespacios afines, entonces*

$$\overrightarrow{S+T} = \vec{S} + \vec{T} + \overrightarrow{PQ},$$

donde $P \in S$ y $Q \in T$.

Como consecuencia,

1. Si $S \cap T = \emptyset$, entonces $\dim(S+T) = \dim(\vec{S} + \vec{T}) + 1$.

2. Si $S \cap T \neq \emptyset$, entonces $\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$.

Definición 2.4 *Se consideran S y T dos subespacios afines. Se dice que S es paralelo a T si $\vec{S} \subset \vec{T}$. Cuando se tiene igualdad, se dice que S y T son paralelos.*

Se tiene las siguientes propiedades sobre el concepto de paralelismo:

1. Si S es paralelo a T, entonces $S \subset T$ o $S \cap T = \emptyset$.
2. Si S y T son paralelos, entonces o son iguales o son disjuntos.
3. Sea S un subepacio afín y $P \in V$. Entonces existe un único subespacio afín T tal que S y T son paralelos y $P \in T$.
4. Si $S = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = b\}$ es un subespacio afín, entonces el subespacio $\{x \in \mathbb{R}^n; Ax = b'\}$ es paralelo a S. Recíprocamente, si S y T son paralelos, existen matrices A y b, b' tales que $S = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = b\}$, $T = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = b'\}$.

Definición 2.5 *Se dicen que dos variedades lineales se cruzan si no son paralelas y no se intersecan.*

3 Sistemas de referencia afín

Definición 3.1 *Un sistema de referencia afín en un espacio afín es un par de la forma (O, B), donde O es un punto de V y B es una base de V. Al punto O se llama origen y a los elementos de la base, ejes del sistema de referencia.*

En $\mathbb{R}^n$, si O es el elemento neutro y B es la base usual, el sistema de refencia determinado se llama el sistema de referencia afín usual.

Si (O, B) es un un sistema de referencia afín, los puntos $\{P_0, \ldots, P_n\}$, donde $P_0 = O$ y $P_i = O + e_i$, son afinmente independientes. Recíprocamente, si $\{P_0, \ldots, P_n\}$

son $n+1$ puntos afinmente independientes de un espacio afín de dimensión n, entonces (P_0, B), donde $B = \{\overrightarrow{P_0P_i}; 1 \leq i \leq n\}$, es un sistema de referencia afín.

Si P es un punto de V, se llaman *coordenadas afines* respecto del sistema de referencia afín a los únicos números x_i tales que

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,$$

o lo que es lo mismo,

$$P = O + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Si S es un subespacio afín (de dimensión $n-m$) de $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{R} = (O, B = \{e_i\})$ es un sistema de referencia afín, se llaman coordenadas cartesianas de S respecto de $\mathcal{R}$ a m ecuaciones lineales linealmente independientes tales que

$$S = \{O + x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n; Ax = b\},$$

donde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tiene rango m y $b \in \mathbb{R}^m$. Estudiamos cómo cambia las ecuaciones cartesianas al cambiar el sistema de referencia. Sea $\mathcal{R}' = (O', B = \{e'_i\})$ otro sistema de referencia y $P \in V$. Entonces

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}.$$

Si $\overrightarrow{OO'} = \sum_i d_i e_i$ y $P = M(1_V, B', B)$ es la correspondiente matriz de cambio de base, entonces $x = Px'$. Por tanto $x = d + Px'$ y

$$Ax = Ad + APx'.$$

Sustituyendo en $Ax = b$ se tiene que las ecuaciones de S respecto de $\mathcal{R}'$ son

$$S = \{O' + x_1 e'_1 + \ldots + x_n e'_n; APx' = b - Ad\}.$$

