Tema 5:

ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS

Prof. Rafael López Camino
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Material docente para el alumno
Asignatura: Geometría I. Curso 2003/04
Licenciatura: Matemáticas (Plan 2000)
Universidad de Granada

1 Métrica euclídea

Definición 1.1 *Una métrica euclídea g en un espacio vectorial V es una métrica definida positiva. Al par (V,g) se llama espacio vectorial euclídeo.*

Por tanto, una métrica g es euclídea si y sólo si su signatura es $(n,0)$, donde n es la dimensión del espacio vectorial.

A continuación, mostramos algunos ejemplos de espacios vectoriales euclídeos.

1. $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual $\langle,\rangle$: $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, donde $x=(x_1,\ldots,x_n)$ e $y=(y_1,\ldots,y_n)$.
2. En el espacio vectorial de las matrices cuadradas reales de orden n, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la métrica $g(A,B)=\text{traza}(AB^t)$ es una métrica euclídea.
3. Se considera el espacio vectorial de dimensión infinita $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de las funciones continuas definidas en el intervalo cerrado $[0,1]$. La siguiente métrica es euclídea:
$$g(f,h)=\int_0^1 f(x)h(x)\ dx.$$
4. Sea $V_n[x]$ el espacio de las funciones polinómicas de grado menor o igual que n definidas en el intervalo cerrado $[0,1]$. La métrica $g(p,q)=\int_0^1 p(x)q(x)\ dx$ es euclídea.

A continuación motramos formas de construir espacios euclídeos a partir de otros.

Proposición 1.2 *Sea (V,g) un espacio euclídeo y $U\subset V$ un subespacio vectorial de V. Se considera $g_{|U}$ la restricción de g al producto $U\times U$. Entonces $(U,g_{|U})$ es un espacio euclídeo.*

A partir de los ejemplos anteriores, concluimos que la métrica construida en $V_n[x]$ es la métrica inducida de la existente en $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ en el subespacio vectorial $V_n[x]\subset\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Proposición 1.3 *Sea (V,g) un espacio euclídeo y V' un espacio vectorial isomorfo a V mediante el isomorfismo $\phi : V' \to V$. La métrica*

$$g'(x',y') = g(\phi(x'),\phi(y')), \qquad x',y' \in V',$$

es euclídea.

Como ejemplo, si consideramos el isomorfismo $\phi : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}^{n^2}$ dado por escribir cualquier matriz cuadrada de orden n como el vector de $\mathbb{R}^{n^2}$ consistente en ir colocando todas las filas consecutivas como vector de $\mathbb{R}^{n^2}$, entonces ϕ lleva la métrica usual $\langle,\rangle$ de $\mathbb{R}^{n^2}$ en la métrica $g(A,B) = \text{traza}(AB^t)$.

Proposición 1.4 *Sean (V,g) y (V',g') dos espacios euclídeos. En el espacio vectorial producto se define la métrica producto $g \times g'$ mediante*

$$(g \times g')((x,x'),(y,y')) = g(x,y) + g'(x',y').$$

Esta métrica es una métrica euclídea.

2 Módulo de un vector, ortogonalidad, ángulo y distancia

Definición 2.1 *Sea (V,g) un espacio euclídeo. La norma o módulo de un vector $x \in V$ se define como*

$$|x| = \sqrt{g(x,x)}.$$

Como ejemplo, si $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

Proposición 2.2 *Sea (V,g) un espacio euclídeo. Entonces*

1. $|x| \geq 0$ *y es cero si y sólamente* $x = 0$.

2. *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$, *entonces* $|\lambda x| = |\lambda||x|$.
3. *Si* $x, y \in V$, *entonces* $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2g(x,y)$.
4. *Si* $x, y \in V$, *entonces* $g(x,y) = \frac{1}{2}(|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2)$.

Teorema 2.3 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) *Sea* (V, g) *un espacio euclídeo. Entonces*

$$g(x,y)^2 \leq |x|^2 + |y|^2,$$

y la igualdad ocurre si y sólo si $\{x, y\}$ *son linealmente independientes.*

Definición 2.4 *Sea* (V, g) *un espacio euclídeo.*

1. *Dos vectores* $x, y \in V$ *se llaman ortogonales si* $g(x,y) = 0$.
2. *Un vector* x *se llama unitario si su módulo es* 1.
3. *Un conjunto de vectores* $\{x_1, \ldots, x_m\}$ *se llama ortogonal (resp. unitario, ortonormal) si* $g(x_i, x_j) = 0$, $i \neq j$ *(resp.* $|x_i| = 1$, $g(x_i, x_j) = \delta_{ij}$*).*

Proposición 2.5 *Si* (V, g) *es un espacio euclídeo, entonces*

1. *Si* $\{x_1, \ldots, x_m\}$ *es un conjunto ortogonal, y los vectores son no nulos, entonces es un conjunto de vectores linealmente independiente.*
2. *Si* $x \neq 0$, *entonces* $x/|x|$ *es un vector unitario.*

Proposición 2.6 *En un espacio vectorial euclídeo hay bases ortonormales.*

Proposición 2.7 (Gram-Schmidt) *Sea* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *una base de un espacio euclídeo* (V, g). *Entonces la base* $\{e'_1, \ldots, e'_n)$ *definida por recurrencia*

$$e'_1 = e_1$$

$$e'_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{g(e_k, e'_i)}{g(e'_i, e'_i)} e'_i$$

es una base ortogonal de (V, g). Por tanto,

$$\left\{ \frac{e'_1}{|e'_1|}, \ldots, \frac{e'_n}{|e'_n|} \right\}$$

es una base ortonormal.

Proposición 2.8 *Sea (V, g) un espacio euclídeo y $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormal.*

1. *Si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, entonces $x_i = g(x, e_i)$.*
2. *$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.*
3. *$g(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.*

Proposición 2.9 *Sean B y B' dos bases ortonormales de un espacio euclídeo. Entonces la matriz de cambio de base $P = M(1_V, B, B')$ satisface $PP^t = P^tP = I$.*

Definición 2.10 *Una matriz cuadrada A se llama ortogonal si $AA^t = A^tA = I$. El conjunto $O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); AA^t = A^tA = I\}$ se llama grupo ortogonal.*

Se tiene las siguientes propiedades de matrices ortogonales:

1. Si A es ortogonal, entonces $A^{-1} = A^t$ y también es ortogonal.
2. Si A y B son dos matrices ortogonales, su producto AB también es ortogonal.
3. Si A es una matriz ortogonal, su determinante es ± 1.

Proposición 2.11 *Sea $A \in O(n)$, (V, g) un espacio vectorial euclídeo de dimensión n y B una base ortonormal de V. Entonces A es la matriz de cambio de base de B a otra base ortonormal.*

Definición 2.12 (Ángulo) *Sean* $x, y \in (V, g)$ *dos vectores no nulos. Se define el ángulo entre* x *e* y *como el único número* $\theta \in [0, \pi]$ *que satisface*

$$\cos\theta = \frac{g(x,y)}{|x||y|}.$$

Se tiene las siguientes propiedades:

1. El ángulo entre dos vectores satisface la propiedad simétrica.
2. El ángulo de un vector consigo mismo es 0 y el ángulo con su opuesto es π.
3. El ángulo entre dos vectores es 0 o π si y sólamente si son proporcionales.
4. Dos vectores son perpendiculares si y sólo si el ángulo que forman es $\pi/2$.
5. $g(x, y) = |x||y| \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre x e y.

Definición 2.13 (Distancia) *Se define la distancia de dos vectores* x, y *de un espacio vectorial euclídeo* (V, g) *como*

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Las principales propiedades de la distancia son

1. $d(x, y) \geq 0$ y es cero si y sólamente si $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para cualquier $z \in V$.

3 Suplemento ortogonal

Definición 3.1 *Sea X un subconjunto de vectores de un espacio vectorial euclídeo (V, g). Se define el subespacio suplemento ortogonal de X como el conjunto*

$$X^{\perp} = \{y \in V; g(y, x) = 0, \forall x \in X\}.$$

Proposición 3.2

1. *$X^{\perp}$ es un subespacio vectorial.*
2. *Si $U =< x_1, \ldots, x_m >$, entonces $U^{\perp} =< x_1, \ldots, x_m >^{\perp}$.*
3. *Si $X \subset Y$, entonces $Y^{\perp} \subset X^{\perp}$.*
4. *Si U es un subespacio vectorial de V, entonces $dim(U^{\perp}) = dim(V) - dim(U)$.*
5. *$(U^{\perp})^{\perp}$. Además $V = U \oplus U^{\perp}$.*

Teorema 3.3 *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y B una base ortonormal. Se considera un subespacio vectorial U mediante sus coordenadas cartesianas respecto de la base B:*

$$U = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \ldots, a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0\}.$$

Entonces

$$U =< (a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, (a_{m1}, \ldots, a_{mn}) > .$$

Definición 3.4 *Sea U un subespacio vectorial de un espacio euclídeo (V, g) y $x \in V$. Se define la distancia de x a U como*

$$d(X, U) = \inf\{d(x, u); u \in U\}.$$

Proposición 3.5 *Si $x \in V$ y U es un subespacio vectorial de (V, g), entonces existe un único $u_0 \in U$ tal que*

$$d(x, u_0) = d(x, U).$$

Demostración: El vector u_0 viene determinado cuando consideramos la descomposición única $x = u_0 + w$ al considerar la suma directa $V = U \oplus U^\perp$. *q.e.d*

Proposición 3.6 *Se considera un hiperplano* $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\}$ *mediante su ecuación cartesiana respecto de una base ortonormal de un espacio vectorial euclídeo* (V, g)*. Si* $x \in V$*, entonces*

$$d(x, H) = \frac{|\sum_{i=1}^n a_i x_i|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}.$$

Definición 3.7 *Si* U *es un subespacio de un espacio euclídeo* (V, g)*, se define la proyección ortogonal sobre* U *a la aplicación* $p_U : V \to V$ *definidad por* $p_U(v) = u$*, donde* $u \in U$ *es el vector de la descomposición de* v *según* $V = u \oplus U^\perp$*.*

Proposición 3.8

1. *La proyección ortogonal es una aplicación lineal.*
2. $p_U \circ p_U = p_U$*.*
3. $Ker(p_U) = U^\perp$ *e* $Im(p_U) = U$*.*