Tema 4:

FORMAS BILINEALES Y CUADRÁTICAS

Prof. Rafael López Camino
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Material docente para el alumno
Asignatura: Geometría I. Curso 2003/04
Licenciatura: Matemáticas (Plan 2000)
Universidad de Granada

1 Formas bilineales

Definición 1.1 *Una forma bilineal en un espacio vectorial V es una aplicación $T : V \times V \to \mathbb{R}$ que satisface las dos siguientes propiedades:*

1. $T(\lambda u + \mu v, w) = \lambda T(u, w) + \mu T(v, w)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $u, v, w \in V$.
2. $T(u, \lambda v + \mu w) = \lambda T(u, v) + \mu T(u, w)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $u, v, w \in V$.

A continuación, ponemos algunos ejemplos de formas bilineales.

1. La aplicación trivial $0 : V \times V \to \mathbb{R}$ es bilineal.
2. $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $T(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ es bilineal y se llama producto euclídeo de $\mathbb{R}^n$.
3. La aplicación $T : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $T(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1}$ es bilineal y se llama métrica de Lorentz-Minkowski de $\mathbb{R}^{n+1}$.
4. Sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. La aplicación $T(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i x_i y_i$ es bilineal.
5. $T((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 - x_2 y_1$ es una forma bilineal en $\mathbb{R}^2$, que es justamente el determinante de $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$.
6. Sean $\alpha, \beta \in V^*$. La aplicación $T : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por $T(u, v) = \alpha(u)\beta(v)$ es bilineal.
7. La aplicación $T : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $T(A, B) = \text{traza}(AB^t)$ es bilineal.
8. Si T y S son formas bilineals sobre dos espacios vectoriales V y V', entonces $T \times S$ es bilineal en $V \times V'$.

Proposición 1.2 *En un espacio vectorial, la única aplicación que es lineal y bilineal a la vez es la aplicación trivial.*

Proposición 1.3 *Sea T una forma bilineal en un espacio vectorial. Entonces se tiene*

1. $T(0,v)=T(u,0)=0$, $u,v\in V$.
2. $T(-u,v)=T(u,-v)=-T(u,v)$, $u,v\in V$.
3. *Si* $u_1,\ldots,u_n,v_1,\ldots,v_n\in V$ *y* $\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\mu_1,\ldots,\mu_n\in\mathbb{R}$, *entonces* $T(\sum\lambda_i u_i,\sum\mu_i v_i)=\sum_{ij}\lambda_i\mu_j T(u_i,v_j)$.

Sea T una forma bilineal en un espacio vectorial V y $B=\{e_1,\ldots,e_n\}$ una base suya. Sea $a_{ij}=T(e_i,e_j)$. Si $u,v\in V$ y $(x_1,\ldots,x_n)$, $(y_1,\ldots,y_n)$ son sus coordenadas respecto de B respectivamente, la proposición anterior nos dice que

$$T(u,v)=\sum_{i,j}x_iy_jT(e_i,e_j)=\sum_{i,j}x_iy_ja_{ij}=(x_1\ldots x_n)(a_{ij})\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

Definición 1.4 *Se llama expresión matricial de T respecto de la base B a la matriz*

$$M_B(T)=(T(e_i,e_j)).$$

Si X e Y son las matrices coordenadas de dos vectores u y v respecto de la base B, entonces

$$T(u,v)=XM_B(T)Y^t.$$

Teorema 1.5 *Sea V un espacio vectorial y B una base suya. Dada una matriz cuadrada A de orden n, existe una única forma bilineal T cuya expresión matricial respecto de la base B es A.*

Demostración: Se define $T(u,v)=XAY^t$, donde X e Y son las coordenadas de u y v respecto de la bse B.. Entonces T es una forma bilineal y su expresión matricial respecto de B es la matriz A. *q.e.d*

Si nos preguntamos cómo cambia la expresión matricial de T al cambiar de bases, se tiene lo siguiente. Sea $B' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ otra base de V y $P = M(1_V, B, B')$ la matriz de cambio de base. Entonces

$$e_j = \sum_i p_{ij} e'_i.$$

$$T(e_i, e_j) = \sum_{kl} p_{ki} p_{lj} T(e'_k, e'_l).$$

Por tanto

$$M_B(T) = P^t M_{B'}(T) P.$$

Definición 1.6 *Dos matrices A y C se llaman congruentes si existe una matriz regular P tal que $A = P^t C P$.*

Por tanto, la relación que hay entre dos expresiones matriciales de la misma aplicación bilineal es que son matrices congruentes. Además, si dos matrices son congruentes, son equivalentes. Del mismo modo, 'ser congruentes' es una relación de equivalencia en el conjunto de las matrices cuadradas.

Proposición 1.7 *Sea V un espacio vectorial de dimensión n y A, C dos matrices cuadradas de orden n que son congruentes. Entonces existe una forma bilineal T tal que A y C son expresiones matriciales de T respecto de sendas bases de V.*

2 El espacio vectorial de las formas bilineales

Denotamos por $\mathcal{T}_2(V)$ el conjunto de las formas bilineales de V. Se define una estructura natural de espacio vectorial del siguiente modo:

$$(T + T')(u, v) = T(u, v) + T'(u, v), \ u, v \in V.$$

$$(\lambda T)(u, v) = \lambda T(u, v) \ u, v \in V, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2.1 *Con esta suma y producto por escalares, el conjunto $\mathcal{T}_2(V)$ es un espacio vectorial de dimensión n^2, $n = dim\ (V)$.*

La prueba de que $\mathcal{T}_2(V)$ tiene la dimensión dada se puede hacer de dos formas. La primera es probar que la aplicación $\Phi : \mathcal{T}_2(V) \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ dada por $\Phi(T) = M_B(T)$, donde B es una base prefijada en V, es un isomorfimos de espacios vectoriales (la linealidad es evidente, y el hecho de ser sobreyectiva es consecuencia del Teorema 1.5).

Otra forma es dar una base del espacio. Sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de V. Si $k, l \in \{1, \ldots, n\}$, se define la forma bilineal $T_{kl} : V \times V \to \mathbb{R}$ mediante $M_B(T_{kl}) = (\delta_{ik}\delta_{lj})$, es decir, $T_{kl}(e_k, e_k) = 1$ y 0 en otro caso. Entonces el conjunto $\{T_{kl}, 1 \leq k, l \leq n\}$ es una base de $\mathcal{T}_2(V)$.

Definición 2.2 *Una forma bilineal se llama simétrica (resp. antisimétrica) si $T(u, v) = T(v, u)$ (resp. $T(u, v) = -T(v, u)$).*

Uno puede probar fácilmente que si T es una forma bilineal simétrica tal que $T(u, u) = 0$ para cada $u \in V$, entonces $T = 0$. Del mismo modo T es antisimétrica si y sólo si $T(u, u) = 0$ para cada $u \in V$.

Proposición 2.3 *Sea B una base de un espacio vectorial V y T una forma bilineal de V. Entonces T es simétrica (resp. antisimétrica) si y sólo si $M_B(T)$ es una matriz simétrica (resp. antisimétrica).*

Si definimos los conjuntos

$$S_2(V) = \{T \in \mathcal{T}_2(V); T \text{ es simétrica}\}.$$

$$A_2(V) = \{T \in \mathcal{T}_2(V); T \text{ es antisimétrica}\}$$

entonces es fácil probar que son subespacios vectoriales de $\mathcal{T}_2(V)$ de dimensiónes $n(n + 1)/2$ y $n(n - 1)/2$ respectivamente.

3 Métricas de un espacio vectorial

Definición 3.1 *Una métrica g de un espacio vectorial V es una forma bilineal simétrica de V. Al par (V, g) se llama espacio métrico.*

Definición 3.2 *Si $x, y \in V$, se dice que son conjugados u ortogonales si $g(x, y) = 0$. Se llama cono de luz de g al conjunto de vectores que son conjugados consigo mismos (o autoconjungados).*

El cono de luz no es en general un subespacio vectorial de V

Definición 3.3 *Si g es una métrica de V, se llama radical al subespacio vectorial*

$$rad(g) = \{x \in V; g(x, y) = 0, \forall y \in V\}.$$

Su dimensión se llama nulidad de la métrica. La métrica se llama no degenerada (resp. degenerada) si el radical es trivial (resp. no trivial).

Como ejemplo, uno puede comprobar fácilmente que para la métrica euclídea, el radical es trivial así como el cono de luz. Para la métrica de Lorentz-Minkowski, el radical sigue siendo trivial pero no así el cono de luz.

Estudiemos los dos siguiente ejemplos.

1. Sea $V = \mathbb{R}^2$ y la métrica $g((x, y), (x', y')) = xx'$. Entonces $\mathrm{rad}(g) =< (0, 1) >$ y el cono de luz de g es la recta $< (0, 1) >$.
2. Sea $V = \mathbb{R}^3$ y $g((x, y, z), (x', y', z')) = xx' - yy'$. En este caso $\mathrm{rad}(g) =< (0, 0, 1) >$ y el cono de luz es el conjunto $x^2 - y^2 = 0$, es decir, la unión del plano $x - y = 0$ con el plano $x + y = 0$.

Proposición 3.4 *Si g es una métrica en un espacio vectorial, entonces la nulidad de g es $n - rango(M_B(g))$, donde B es una base cualquiera de V.*

Definición 3.5 *Sea g una métrica en un espacio vectorial. Se dice que g es*

1. *definida positiva si $g(x,x) > 0$ para cada $x \neq 0$.*
2. *semidefinida positiva si $g(x,x) \geq 0$ para cada $x \in V$.*
3. *definida negativa si $g(x,x) < 0$ para cada $x \neq 0$.*
4. *semidefinida negativa si $g(x,x) \leq 0$ para cada $x \in V$.*

Definición 3.6 *Sea U un subespacio vectorial de (V,g). Se llama espacio ortogonal a U al conjunto*

$$U^\perp = \{x \in V; g(x,u) = 0, \forall u \in U\}.$$

Este conjunto es un subespacio vectorial. En particular, $V^\perp = \mathrm{rad}(g)$.

Proposición 3.7 *Sea U un subespacio vectorial que satisface $V = rad(g) \oplus U$. Entonces $(U, g_{|U})$ es un espacio vectorial métrico no degenerado.*

Definición 3.8 *Una base $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de un espacio vectorial métrico (V,g) es una base ortonormal o conjungada si satisface*

$$M_B(g) = \begin{array}{ccccc} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \vdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x_n \end{array}$$

Teorema 3.9 *En un espacio vectorial métrico existen bases conjugadas.*

Teorema 3.10 (Sylvester) *En un espacio vectorial métrico, el número de 1, -1 y 0 que existen en la expresión matricial de lal métrica respecto de una base ortonormal no depende de la base.*

Es evidente que la nulidad de la métrica coincide con el número de 0 de la expresión matricial de g respecto de bases ortonormales.

Definición 3.11 *En un espacio métrico se llama índice el número de* -1 *y signatura al para* (p, q)*, donde* p *es el número de* 1 *y* q *es el índice.*

Por tanto, la nulidad es $n - (p + q)$. Además, la métrica es definida positiva (resp. negativa) si la nulidad es $(n, 0)$ (resp. $(0, n)$). También se tiene que la métrica es no degenerada si y sólo si $n = p + q$.