Tema 2:

APLICACIONES LINEALES

Prof. Rafael López Camino
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Material docente para el alumno
Asignatura: Geometría I. Curso 2003/04
Licenciatura: Matemáticas (Plan 2000)
Universidad de Granada

1 Aplicación lineal

Definición 1.1 *Una aplicación $f : V \to V'$ entre dos espacios vectoriales se dice que es lineal si satisface las dos siguientes propiedades:*

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$, $\forall u, v \in V$.
2. $f(\lambda v) = \lambda f(v)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V$.

Si $V = V'$, se llama también endomorfismo.

Esta definición es equivalente a que

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v), \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, u, v \in V.$$

Como ejemplos de aplicaciones tenemos los siguientes:

1. La aplicación identidad $1_V : V \to V$ y la aplicación nula $0 : V \to V'$ son lineales.
2. Si $\lambda \neq 0$, la aplicación $f_\lambda : V \to V$ definida por $f_\lambda(v) = \lambda v$, se llama homotecia de razón λ. Esta aplicación es una homotecia.
3. Las aplicaciones proyecciones $p_i : V_1 \times V_2 \to V_i$, $p_i(v_1, v_2) = v_i$ son lineales.
4. Si U es un subespacio de un espacio vectorial V, la aplicación inclusión $i : U \to V$ es lineal.
5. Si U es un subespacio de un espacio vectorial, la aplicación proyección $\pi : V \to V/U$, $\pi(v) = v + U$, es lineal.
6. Si U es un subespacio vectorial y $f : V \to V'$ es una aplicación lineal, entonces la restricción a U, $f_{|U} : U \to V'$ es lineal.
7. La composición de aplicaciones lineales es lineal.

8. Sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de un espacio vectorial V. Entonces la aplicación $f : \mathbb{R}^n \to V$ definida por $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$ es lineal y biyectiva

Proposición 1.1 *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal.*

1. $f(0) = 0$.
2. $f(-v) = -f(v)$.
3. *Si U (resp. U') es un subespacio de V (resp. de V'), entonces $f(U)$ es un subespacio de V' (resp. $f^{-1}(U')$). En particular, el conjunto imagen de f, $Im(f)$, es un subespacio vectorial de V'.*
4. $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i)$.
5. $< f(v_1), \ldots, f(v_n) >= f(< v_1, \ldots, v_n >)$.

Definición 1.2 *Una aplicación lineal se llama monomorfismo (resp. epimorfismo, isomorfismo) si es inyectiva (resp. sobreyectiva, biyectiva). Un automorfismo es un endomorfismo biyectivo.*

Definición 1.3 *El núcleo de una aplicación lineal $f : V \to V'$ es el conjunto*

$$Ker(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{v \in V; f(v) = 0\}.$$

Teorema 1.1 *Una aplicación lineal es inyectiva si y sólo si $Ker(f) = \{0\}$.*

Proposición 1.2 *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal. Sea $X \subset V$ un conjunto finito de vectores. Si f es monomorfismo (resp. epimorfismo, isomorfismo) y X es linealmente independiente (resp. sistema de generadores, base), entonces $f(X)$ es linealmente independiente (resp. sistema de generadores, base).*

Como consencuencia de este resultado, se tiene

Corolario 1.1 *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal. Si f es inyectiva (resp. sobreyectiva, biyectiva), entonces $dim(V) \leq dim(V')$ (resp. $dim(V) \geq dim(V')$, $dim(V) = dim(V')$).*

Proposición 1.3 *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal y B una base de V. Si $f(B)$ es linealmente independiente (resp. sistema de generadores, base), entonces f es inyectiva (resp. sobreyectiva, biyectiva).*

Teorema 1.2 *Si $f : V \to V'$ es una aplicación lineal, entonces*

$$dim(V) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f)).$$

A la dimensión del núcleo se llama nulidad de f, $n(f)$, y a la dimensión de la imagen de f se llama rango de f, $r(f)$.

Demostración: Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de V, donde $\{e_1, \ldots, e_k\}$ es una base de $Ker(f)$, entonces una base de $Im(f)$ es $\{f(e_{k+1}, \ldots, f(e_n)\}$. *q.e.d*

Corolario 1.2 *En una aplicación lineal f, $r(f) \leq dim(V)$. Además, si U es un subespacio de V, entonces $dim(f(U)) \leq dim(U)$.*

Corolario 1.3 *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal tal que $dim(V) = dim(V')$. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *f es inyectiva.*
2. *f es sobreyectiva.*
3. *f es biyectiva.*

Teorema 1.3 *Sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de un espacio vectorial V y $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ un subconjunto de vectores de un espacio V'. Entonces existe una única aplicación lineal $f : V \to V'$ tal que $f(e_i) = v'_i$, $1 \leq i \leq n$.*

Demostración: Basta con definir

$$f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i'.$$

q.e.d

Como consecuencia,

Corolario 1.4 *Sean V y V' espacios vectoriales de dimensiones n y m respectivamente. Entonces existe un monomorfismo de V a V' (resp. epimorfismo, isomorfismo) si y sólo si $n\leq m$ (resp. $n\geq m$, $n=m$).*

Se considera ahora el conjunto de todas las aplicaciones lineales de un espacio V a otro V' y al que denotaremos por $L(V,V')$. Dotamos a este conjunto estructura de espacio vectorial del siguiente modo: si $f,g\in L(V,V')$ y $\lambda\in\mathbb{R}$, se define $f+g:V\rightarrow V'$ y $\lambda f:V\rightarrow V'$

$$(f+g)(v)=f(v)+g(v).$$

$$(\lambda f)(v)=\lambda f(v).$$

Proposición 1.4 *El conjunto $L(V,V'$ es un espacio vectorial con esta suma y producto por escalares.*

Teorema 1.4 *La dimensión de $L(V,V')$ es $dim(V)dim(V')$.*

Demostración: Sea $B=\{e_1,\ldots,e_n\}$ y $B'=\{e_1',\ldots,e_m'\}$ bases de V y V' respectivamente. Para cada $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq m$, se define $f_{ij}:V\rightarrow V'$ como

$$f_{ij}(e_k)=\delta_{ik}e_j'.$$

Entonces el conjunto $\{f_{ij};1\leq i\leq n,1\leq j\leq m\}$ es una base de $L(V,V')$. *q.e.d*

2 El grupo lineal general

Definición 2.1 *Si $f : V \to V'$ es un isomorfismo, se dice que V es isomorfo a V' y se denotará por $V \cong V'$.*

3 Espacio dual

Definición 3.1 *Si V es un espacio vectorial, el espacio dual de V, y se denotará por V^*, es el espacio vectorial $V = * = L(V, \mathbb{R})$. A los elementos de V^* se llaman formas lineales de V.*

En particular, $dim(V^*) = dim(V)$.

Teorema 3.1 *Sea $f \in V^*$. Entonces*

1. *$f = 0$ o $Ker(f)$ es un hiperplano de V.*
2. *Las formas lineales de $\mathbb{R}^n$ son de la forma $f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots, a_nx_n$, para ciertos $a_i \in \mathbb{R}$.*
3. *Los hiperplanos de $\mathbb{R}^n$ son de la forma $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\}$ para ciertos $a_i \in \mathbb{R}$ no todos nulos.*
4. *Sea H un subespacio vectorial de un espacio V. Entonces H es un hiperplano si y sólo si es el núcleo de una forma lineal no nula de V.*
5. *Sean f, g dos formas lineales de un espacio V. Entonces f es proporcional a g si y sólo si sus núcleos coinciden.*

Sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de V. Consideramos la base B^* de V^* determinada en la sección anterior al tomar en $\mathbb{R}$ la base usual, es decir, $B^* = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, donde $\omega_i : V \to \mathbb{R}$ está definida mediante

$$\omega_i(e_j) = \delta_{ij}.$$

Definición 3.2 *A la base B^* se le llama la base dual de B.*

Teorema 3.2 *Sea U un subespacio de un espacio vectorial V. Entonces U tiene dimensión k si y sólo existen $n-k$ formas lineales $\omega_1, \ldots, \omega_{n-k}$ linealmente independientes tales que*

$$U = \{v \in V; \omega_i(v) = 0, 1 \leq i \leq n-k\}.$$