Tema 1:

ESPACIOS VECTORIALES

Prof. Rafael López Camino
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Material docente para el alumno
Asignatura: Geometría I. Curso 2003/04
Licenciatura: Matemáticas (Plan 2000)
Universidad de Granada

1 Espacio vectorial

Definición 1.1 *Un espacio vectorial es una terna $(V, +, \cdot)$, donde V es un conjunto no vacío y $+, \cdot$ son dos operaciones del tipo $+ : V \times V \to \mathbb{R}$, $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ a las que llamaremos 'suma de vectores' y 'producto por escalares respectivamente y con las siguientes propiedades: denotando $+(u, v) = u + v$ y $\cdot(\lambda, v) = \lambda v$,*

1. $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall u, v, w \in V$ *(asociativa).*
2. $u + v = v + u$, $\forall u, v \in V$ *(conmutativa).*
3. *Existe* $e \in V$ *tal que* $e + v = v + e = v$, $\forall v \in V$ *(elemento neutro).*
4. *Para cada* $v \in V$ *existe* w *tal que* $v + w = w + v = e$ *(elemento opuesto).*
5. $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$, $\forall v \in V$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *(seudo-asociativa).*
6. $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$ *y* $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$, $\forall u, v \in V$ *y* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *(distributiva).*
7. $1v = v$,$\forall v \in V$ *(unimodular).*

De forma abreviada, diremos que V es un espacio vectorial. A los elementos de V lo llamamos vectores y a los de $\mathbb{R}$, escalares.

Proposición 1.1 *En un espacio vectorial V,*

1. *El elemento neutro es único. Se denotará por* 0.
2. *El elemento opuesto de un vector es único. Si v es un vector, su opuesto lo denotamos por $-v$.*

Proposición 1.2 *En un espacio vectorial se tiene las siguientes propiedades:*

1. $\lambda 0 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. $0v = 0$, $v \in V$.

3. $(-\lambda)v = -(\lambda v)$, $\lambda \in \mathbb{R}, v \in V$.

4. *Si* $\lambda v = 0$, *entonces* $\lambda = 0$ *o* $v = 0$.

A continuación, damos algunos ejemplos de espacios vectoriales:

1. Si n es un número natural, se considera el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$ con la suma y producto por escalares siguientes:

$$(x_1 \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)0(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

   Siempre se supondrá que $\mathbb{R}^n$ tiene esta estructura vectorial y que llamaremos *usual*.

2. Sea $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y = 0\}$ con la suma y producto por escalares como antes.

3. Sea $V = \{p\}$ un conjunto con un único elemento y con $p + p = p$ y $\lambda p = p$.

4. Sea $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f \text{ es aplicación}\}$ y

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

5. $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f \text{ es una función diferenciable}\}$ y la suma y el producto por escales está definido de forma análoga a la del ejemplo anterior.

6. Se considera el conjunto de los polinomios de grado $n \in \mathbb{N}$: un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$ es una expresión del tipo $p(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$; abreviaremos $p(X) = \sum_{i=1}^n a_iX^i$, donde por convenio $X^0 = 1$ y en vez de escribir $a_01 = a_0$. Dos polinomios $p(X) = \sum_{i=1}^n a_iX^i$ y $q(X) = \sum_{i=1}^n b_iX^i$ se dirán iguales si $a_i = b_i$ para cada i. El conjunto de polinomios de grado n

lo denotamos por $\mathbb{P}_n[X]$.Definimos la siguiente suma de polinomios y de un escalar por un polinomio:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X^i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i X^i\right) = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)X^i$$

$$\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X^i\right) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda a_i)X^i$$

Entonces $\mathbb{P}_n[X]$ es un espacio vectorial.

7. Sea $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un conjunto con n elementos. Se define una palabra formada por el conjunto X como una expresión del tipo $x_1a_1 + \ldots + x_na_n$, donde $x_i \in \mathbb{R}$. Dos palabras $x_1a_1 + \ldots + x_na_n$ y $y_1a_1 + \ldots + y_na_n$ son iguales si $x_i = y_i$. Se define V el conjunto de todas las palabras y se define

$$(x_1a_1 + \ldots + x_na_n) + (y_1a_1 + \ldots + y_na_n) = (x_1 + y_1)a_1 + \ldots + (x_n + y_n)a_n.$$

$$\lambda(x_1a_1 + \ldots + x_na_n) = (\lambda x_1)a_1 + \ldots + (\lambda x_n)a_n.$$

Entonces V es un espacio vectorial. Como ejemplo, el conjunto de palabras definidas por $\{1, X, \ldots, X^n\}$ constituyen el espacio $\mathbb{P}_n[X]$.

A continuación definimos estructuras de espacio vectorial a partir de la teoría de conjuntos. Concretamente, a partir del producto cartesiano, aplicacines biyectivas, espacios cocientes y subconjuntos.

Definición 1.2 *Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales. Se define en $V_1 \times V_2 = \{(v_1, v_2); v_i \in V_i\}$ las siguientes operaciones:*

$$(v_1, v_2) + (u_1, u_2) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2)$$

$$\lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2).$$

Con esta suma y producto por escalares, $V_1 \times V_2$ es un espacio vectorial y se llama espacio producto.

Como caso particular, se tiene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (¡comprobad que ambos espacios vectoriales coinciden!). De la misma forma, se puede definir el espacio vectorial $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Definición 1.3 *Se considera V un espacio vectorial y V' un conjunto biyectivo con V. Sea $f : V \to V'$ una biyección entre ambos. Se defineen V' la siguiente estructura de espacio vectorial:*

$$u' + v' = f(f^{-1}(u') + f^{-1}(v')).$$

$$\lambda v' = f(\lambda f^{-1}(v')).$$

Se dice V' tiene la estructura vectorial inducida de V por la biyección f.

1. La estructura vectorial cambia si cambia la biyección f.
2. Sea $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un conjunto de n elementos y V' el conjunto de palabras definidas a partir de X. Se considera la siguiente biyección entre $\mathbb{R}^n$ y V':

   $$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n.$$

   Entonces la estructura vectorial inducida en V' de $\mathbb{R}^n$ (con la estructura usual) y de la biyección f coincide con la estructura de espacio vectorial que ya se había definida en el conjunto de palabras definidas por X.
3. Se considera $\mathbb{R}$ con su estructura usual y $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos. Se considera la siguiente biyección: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = e^x$. Entonces la estructura de espacio vectorial inducida en $\mathbb{R}^+$ es:

   $$x +' y = xy \qquad \lambda \cdot' x = x^\lambda.$$

La estructura vectorial inducida en un subconjunto de un espacio vectorial motiva el estudio de subespacio vectorial.

2 Subespacio vectorial

Definición 2.1 *Sea V un espacio vectorial y U un subconjunto suyo. Se dice que U es un subespacio vectorial de V si satisface las siguientes propiedades:*

1. *Si $u, v \in U$, entonces $u + v \in U$.*
2. *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in U$, entonces $\lambda u \in U$.*
3. *Con la suma y producto por escalares de V, U es un espacio vectorial.*

Proposición 2.1 *Sea U un subconjunto de un espacio vectorial V. Entonces U es un subespacio vectorial si y sólo si*

1. *Si $u, v \in U$, entonces $u + v \in U$.*
2. *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in U$, entonces $\lambda u \in U$.*

Demostración: Supongamos que U satisface las propiedades 1 y 2. Veamos que con éstas son suficientes para probar todas las propiedades de espacio vectorial. Todas éstas son ciertas de forma trivial, excepto dos: la existencia de elemento neutro y opuesto. Pero para ello basta con probar que el elemento neutro de V se encuentra en U y lo mismo sucede con el elemento opuesto de un vector de U.

Por hipótesis, si $u \in U$, $0u = 0 \in U$. De la misma forma, si $u \in U$, $-1u = -(1u) = -u \in U$. *q.e.d*

En particular, todo subespacio vectorial debe contener el elemento neutro del espacio ambiente, así como los elementos opuestos de todos los vectores del subespacio.

Proposición 2.2 1. *Si U_1 y U_2 son subespacios vectoriales, entonces $U_1 \cap U_2$ también es subespacio vectorial.*

2. *Si* U_1 *y* U_2 *son subespacios vectoriales de* V *y* $U_1 \subset U_2$*, entonces* U_1 *es un subespacio vectorial de* U_2*.*

1. Si V es un espacio vectorial, $\{0\}$ y V son subespacios vectoriales, llamados *subespacios vectoriales triviales*.
2. $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.
3. En general, si $a_1, \ldots, a_n$ son números reales, no todos nulos, el conjunto $U = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ si y sólamente si $b = 0$.
4. Si V_1 y V_2 son espacios vectoriales, entonces $V_1 \times \{0\}$ y $\{0\} \times V_2$ son subespacios vectoriales del espacio producto $V_1 \times V_2$.
5. Si V es un espacio vectorial, V' es un conjunto biyectivo con V con la estructura de espacio vectorial inducida por una biyección $f : V \to V'$, entonces $U \subset V$ es un subespacio vectorial si y sólo si $f(U)$ es un subespacio vectorial de V'.

Definición 2.2 *Sean* U *y* W *subespacios vectoriales de* V*. Se define la suma de* U *con* W *como el conjunto*

$$U + W = \{u + w; u \in U, w \in W\}.$$

Entonces $U+W$ *es un subespacio vectorial. Además se tienen las siguientes propiedades:*

1. $U + W = W + U$*.*
2. $U + U = U$*.*
3. $U \subset U + W$*.*
4. $U + W$ *es el menor subespacio (con respecto a la inclusión de conjuntos) que contiene a* U *y a* W*.*

Definición 2.3 *Un espacio vectorial V es suma directa de dos subespacios vectoriales U y W suyo, y se denota por $V = U \oplus W$, si $V = U + W$ y $U \cap W = \{0\}$.*

Con el concepto de subespacio vectorial podemos definir una estructura de espacio vectorial en un conjunto cociente.

Definición 2.4 *Sea U un subespacio vectorial de V. En V se define la siguiente relación binaria R:*

$$vRw \text{ si } v - w \in U.$$

Entonces R es una relación de equivalencia en V. Al conjunto cociente se denota por V/U. Es evidente que la clase de equivalencia de un vector v es

$$[v] = v + U = \{v + u; u \in U\}.$$

En V/U se define la siguiente suma y producto por escalares:

$$(v + U) + (w + U) = (v + w) + U.$$

$$\lambda(v + U) = (\lambda v) + U.$$

Estas operaciones *están bien definidas*: por ejemplo, si $v + U = v' + U$ y $w + U = w' + U$, $v - v' \in U$, $w - w' \in U$ y por tanto, $(v + w) + U = (v' + w') + U$.

Proposición 2.3 *V/U es un espacio vectorial. El elemento neutro es $0 + U$ y si $v + U \in V/U$, su elemento opuesto es $(-v) + U$.*

3 Sistema de generadores. Dependencia lineal

Definición 3.1 *Sean $X = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial V. Una combinación lineal de X es una suma del tipo*

$$a_1v_1 + \ldots + a_nv_n, \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

Se llama subespacio vectorial generados por X al conjunto de combinaciones lineales:

$$< X > = < v_1, \ldots, v_n > = L(\{X\}) = L(\{v_1, \ldots, v_n\}) = \{\sum_{i=1}^{n} a_i v_i; a_i \in \mathbb{R}\}.$$

Proposición 3.1 *Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *$< X >$ es un subespacio vectorial. Si el cardina de X es 1, se dice que $< v >$ es la recta vectorial generada por v.*
2. *Si $X \subset U$, donde U es un subespacio vectorial, entonces $< X > \subset U$.*
3. *Si $X \subset Y$, entonces $< X > \subset < Y >$.*

Como ejemplos tenemos:

1. En $\mathbb{R}^3$, $< (1,0,1), (0,1,1) > = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x - z = 0, y - z = 0\}$.
2. $\mathbb{R}^2 = < (1,1), (0,2) >$.
3. $\mathbb{R}^n = < (1,0,\ldots,0), \ldots, (0,0,\ldots,1) >$.
4. Si X es Y son dos conjuntos finitos de vectores, entonces $< X > + < Y > = < X \cup Y >$.

Definición 3.2 *Un espacio vectorial V se llama finitamente generado si existe un conjunto finito de vectores X tal que $< X > = V$. A X se llama un sistema de generadores de V.*

De esta forma, $\{1, X, \ldots, X^n\}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{P}_n[X]$.

Proposición 3.2 *1. SI X es un sistema de generadores, y $X \subset Y$, entonces Y también es un sistema de generadores.*

2. *Si $\{v_1,\ldots,v_n\}$ es un sistema de generadores y v_1 es combinación lineal de los demás, entonces $\{v_2,\ldots,v_n\}$ es un sistema de generadores de V.*

3. *Si $\{v_1,\ldots,v_n\}$ es un sistema de generadores y $v=\lambda_1 v_1+\ldots+\lambda_n v_n$, con $\lambda_1\neq 0$. Entonces $\{v,v_2,\ldots,v_n\}$ es un sistema de generadores de V.*

4. *Un subespacio vectorial de un espacio vectorial finitamente generado, también es finitamente generado.*

Definición 3.3 *Un conjunto de vectores $\{v_1,\ldots,v_n\}$ se dice que es linealmente independiente (o que forman un conjunto de vectores libre) si la única combinación lineal nula de ellos es la trivial, es dcir, si siempre que se tenga $\sum_{i=1}\lambda_i v_i=0$, entonces $\lambda_i=0$ para cada i. En caso contrario, se dice que son linealmente dependientes.*

Proposición 3.3 1. *$\{v\}$ es linealmente independiente si y y sólo si es no nulo.*

2. *Dos vectores son linealmente independientes si no son proporcionales.*

3. *Todo subconjunto de un conjunto de vectores linealmente independiente, también es linealmente independiente.*

4. *Un conjunto de vectores es linealmente dependiente si alguno de ellos es combinación lineal de los demás.*

1. $\{(1,0,1),(0,1,1)\}\subset\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes.
2. $\{(1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\}\subset\mathbb{R}^n$ es linealmente independientes.
3. $\{1,1+X,1+X^2\}\subset\mathbb{P}_2[X]$ es linealmente independiente.

Definición 3.4 *Una base de un espacio vectorial es un sistema de generadores y linealmente independiente.*

1. $\{(1,0,1),(0,1,1)\}\subset\mathbb{R}^3$ no es base.

2. $\{(1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\}\subset\mathbb{R}^n$ es base. Se llamará la base usual de $\mathbb{R}^n$.
3. $\{1,1+X,1+X^2\}\subset\mathbb{P}_2[X]$ es base.

Se tiene la siguiente caracterización de base.

Proposición 3.4 *Sea $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial. Entonces este conjunto es una base si y sólamente si para cada $v\in V$, existen únicos $\lambda_i\in\mathbb{R}$ tales que $v=\sum_{i=1}^n\lambda_i v_i$. A estos números se le llaman coordenadas de v respecto de la base B y se escribirá $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$.*

A partir de ahora vamos a demostrar que en un espacio vectorial dado, el cardinal de las bases de dicho espacio es siempre el mismo. Primero resolvemos el problema de la existencia de bases en un espacio finitamente generado.

Proposición 3.5 *Sean X e Y dos conjuntos finitos de un espacio vectorial, tales que $X\subset Y$, X es linealmente independiente e Y es un sistema de generadores. Entonces existe una base B de V tal que $X\subset B\subset Y$.*

Como consecuencia

Corolario 3.1 *Si v es un vector no nulo, v pertenece a una base.*

Corolario 3.2 *Dado un conjunto de vectores linealmente independientes, siempre es posible añadir vectores hasta tener una base (completación).*

Corolario 3.3 *En todo sistema de generadores, existe un subconjunto suyo que es base.*

Lema 3.1 *Sea $B=\{e_1,\ldots,e_n\}$ una base de un espacio vectorial. Sea $v\in V$ y $v=\sum_{i=1}^n\lambda_i v_i$. Si $\lambda_1\neq 0$, entonces $\{v,e_2,\ldots,e_n\}$ es una base de V.*

Teorema 3.1 (de la base) *Sea V un espacio vectorial finitamente generado. Entonces todas las bases de V tienen el mismo cardinal, al que se llamará dimensión de V.*

Corolario 3.4 *Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Sea $X = \{e_1, \ldots, e_m\}$ un conjunto de vectores linealmente independiente (resp. sistema de generadores). Entonces $m \leq n$ (resp. $m \geq n$). Además se tiene la igualdad si y sólamente si X es base.*

Corolario 3.5 *Si U es un subespacio vectorial de un espacio vectorial V, entonces $dim(U) \leq dim(V)$ y la igualdad se tiene si y sólamente $U = V$.*

Se tiene los siguiente ejemplos de dimensiones de espacios vectoriales:

1. Por definición $dim(0) = 0$.
2. La dimensión de $\mathbb{R}^n$ es n.
3. La dimensión de $\mathbb{P}_n[X]$ es $n + 1$.

Teorema 3.2

1. *Si V y V' son dos espacios vectoriales, entonces $dim(V \times V') = dim(V) + dim(V')$.*
2. *Si V es un espacio vectorial y V' es un conjunto biyectivo con V, entonces $dim(V') = V$, considerando en V' la estructura vectorial inducida por la biyección.*
3. *Si U y W son dos subespacios vectoriales, entonces $dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$. Como caso particular, si $V = U \oplus W$, entonces $dim(V) = dim(U) + dim(W)$.*
4. *Si U es un subespacio vectorial, entonces $dim(V/U) = dim(V) - dim(U)$.*

Demostración:

1. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y $\{e'_1, \ldots, e'_m\}$ son bases de V y V' respectivamente, entonces una base de $V \times V'$ es $\{(e_1, 0), \ldots, (e_n, 0), (0, e'_1), \ldots, (0, e'_m)\}$.

2. Sea $f : V \rightarrow V'$ la biyección. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de V, entonces $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ es una base de V'.

3. Si $\{e_1, \ldots, e_k\}$ es una base de $U \cap W$, $\{e_1, \ldots, e_k, u_1, \ldots, u_m\}$ es base de U y $\{e_1, \ldots, e_n, w_1, \ldots, w_r\}$ es base de W, entonces una base de $U + W$ es $\{e_1, \ldots, e_n, u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_r\}$. En particular, $V = U \oplus W$ si y sólo si la unión de una base de U y otra de W es una base de V.

4. Si $\{e_1, \ldots, e_m\}$ es una base de U y $\{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ es una base de V, entonces $\{e_{m+1} + U, \ldots, e_n + U\}$ es una base de V/U.

q.e.d

