Tema 1:

ESPACIOS VECTORIALES

Prof. Rafael López Camino
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Material docente para el alumno
Asignatura: Geometría I. Curso 2003/04
Licenciatura: Matemáticas (Plan 2000)
Universidad de Granada

1. Probar que la conmutatividad de la suma de vectores puede deducirse de los otros axiomas de espacio vectorial.

2. En $\mathbb{R}^3$ consideramos la suma usual, y el producto por escalares dado mediante

$$\lambda \star (x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, 3\lambda z).$$

   ¿Es $\mathbb{R}^3$ un espacio vectorial con estas operaciones?

3. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales suyos?

$$\begin{array}{l} U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + 2z = 0\} \\ U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 = y\} \\ U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y = 0, x - z = 0\} \end{array}$$

4. Sea V un espacio vectorial y tres vectores u, v y w de V. Probar que $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente si y sólamente si $\{u, u+v, u+v-w\}$ es linealmente independiente.

5. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base usual de $\mathbb{R}^3$. Se consideran los subespacios:

$$U_1 =< e_1, e_3 >, \quad U_2 =< e_2 >, \quad U_3 =< e_2 + e_3 > .$$

   Demostrar que $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2 + U_3$, $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \{0\}$. Sin embargo, hallar un vector de $\mathbb{R}^3$ con dos descomposiciones diferentes como suma de vectores de U_1, U_2 y U_3.

6. Sea V un espacio vectorial de dimesión n. Probar que para cada número natural $m \leq n$, existe un subespacio de dimensión m. ¿Es único?

7. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios

$$U =< (1, 0, 1), (1, 1, -1) >, \quad W =< (2, 1, 0), (0, -\frac{1}{2}, 1) > .$$

   Estudiar si $U = W$.

8. Determinar una base del subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado por
$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x-y+3z=0, z-t=0\}.$$
Hallar la dimensión de U y hallar una base B de U. Completar hasta una base de $\mathbb{R}^4$.

9. Probar que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$, donde
$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+z=0\}, \quad W = <(1,2,3)> .$$

10. Se considera una base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ y el vector $v = e_1 + e_2 + e_3$. Encontrar una base B' en la que v tenga coordenadas $(1,0,0)$. La misma pregunta, pero con coordenadas $(-1,0,1)$.

11. Sea el espacio vectorial de los polinonmio de grado menor o igual que tres $P_3[X]$ y $U = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in P_3[X]; a_1 + 2a_2 = 0\}$. Probar que U es un subespacio vectorial. Hallar la dimensión. Hallar una base B de U y calcular las coordenadas del vector $1 + 2X - X^2 \in U$ respecto de la base B.

12. Sea V un espacio vectorial y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un conjunto de vectores con la siguiente propiedad: "$\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $B - \{v_i\}$ es un sistema de generadores de V". Probar que B es una base de V.

13. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y v un vector no nulo. Dados $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, con algún $a_i \neq 0$, probar que existe una base de V donde v tiene coordenadas $(a_1, \ldots, a_n)$.

14. En $\mathbb{R}^3$, completar el conjunto $\{e_1 = (1,1,0), e_2 = (0,1,1)\}$ con un vector e_3 con las dos siguientes propiedades: 1) $\{e_1, e_2, e_3\}$ sea una base de $\mathbb{R}^3$ y 2) el vector $(1,1,1)$ tenga coordenadas $(0,1,2)$.

15. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Se consideran los conjuntos
$$B = \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3\}, \quad B' = \{e_1 + 2e_2 + e_3, e_2 + 2e_3, e_1 + e_2\}.$$
Probar que B y B' son bases de $\mathbb{R}^3$. Si un vector tiene coordenadas $(0,1,3)$ respecto de B, hallar sus coordenadas respecto de la base B'.

16. En $\mathbb{R}^3$, consideramos los subespacios vectoriales:
$$U =< (1,1,1),(1,0,1) > .$$
$$V = \{(a,2a,3a); a \in \mathbb{R}\}.$$
$$W =< (0,1,0),(1,3,3) > .$$
Hallar las dimensiones y bases de los subespacios $U+V$, $U+W$, $V+W$, $U\cap V$, $U\cap W$, $V\cap W$, $U+V+W$ y $U\cap V\cap W$.

17. Sea $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Sean las funciones
$$f(x) = x^2+1, \quad g(x) = e^x, \quad h(x) = \sin x.$$
Estudiar si $\{f,g,h\}$ es linealmente independiente.

18. En el mismo espacio anterior, sean
$$P = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}); f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}.$$
$$I = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}); f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}.$$
Probar que P e I son subespacios vectoriales y que no son finitamente generados. Probar que $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = P \oplus I$. Hallar la descomposición en $P+I$ del vector $f(x) = x^2+x+1$.

19. Dado el subespacio vectorial U_1 de $\mathbb{R}^4$ dado por
$$U_1 = \{x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1 - x_3 = 0, x_3 + 2x_4 = 0\},$$
hallar un subespacio vectorial U_2 tal quue $\mathbb{R}^4 = U_1 \oplus U_2$.

20. En $P_4[X]$, se considera los polinomios
$$v_1 = 2x + x^2 + 4x^3 + x^4$$
$$v_2 = 4 - x + x^2 + 6x^3 - 2x^4$$
$$v_3 = 7 - 8x + 3x^2 + ax^3 + bx^4$$
donde $a, b \in \mathbb{R}$. Hallar a y b para que el subespacio $< v_1, v_2, v_3 >$ tenga dimensión 2; hallar una base del subespacio y hallar, resecto de dicha base, las coordenadas de los anteriores tres vectores.

