Tema 3
APLICACIONES LINEALES

Prof. Rafael López Camino
Universidad de Granada

1 Definición y propiedades. Núcleo e imagen. Isomorfismos.

Definición 1.1 *Una aplicación $f : V \to V'$ entre dos espacios vectoriales se dice que es lineal si satisface las dos siguientes propiedades:*

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$, $\forall u, v \in V$.
2. $f(\lambda v) = \lambda f(v)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V$.

Si $V = V'$, se llama también endomorfismo.

Esta definición es equivalente a que

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v), \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, u, v \in V.$$

Como ejemplos de aplicaciones tenemos las siguientes:

1. La aplicación identidad $1_V : V \to V$ y la aplicación nula $0 : V \to V'$.
2. Si $\lambda \neq 0$, la aplicación $f : V \to V$ definida por $f(v) = \lambda v$. Se llama homotecia de razón λ.
3. Las aplicaciones proyecciones $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, dadas por $p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$.

4. Si $U \subset V$ es un subespacio vectorial de V, la aplicación inclusión $i : U \to V$.
5. Si $U \subset V$ es un subespacio vectorial y $f : V \to V'$ es una aplicación lineal, la restricción a U, $f_{|U} : U \to V'$.
6. La composición de aplicaciones lineales.
7. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ n vectores fijos de un espacio vectorial V. Entonces la aplicación $f : \mathbb{R}^n \to V$ definida por $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$ es lineal. Si además, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V, entonces es biyectiva.

Proposición 1.2 *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal.*

1. $f(0) = 0$.
2. $f(-v) = -f(v)$.
3. $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i)$.
4. $< f(v_1), \ldots, f(v_n) >= f(< v_1, \ldots, v_n >)$.
5. *Si U (resp. U') es un subespacio de V (resp. de V'), entonces $f(U)$ es un subespacio de V' (resp. $f^{-1}(U')$). En particular, el conjunto imagen de f, $Im(f)$, es un subespacio vectorial de V'.*

Definición 1.3 *Una aplicación lineal se llama monomorfismo (resp. epimorfismo, isomorfismo) si es inyectiva (resp. sobreyectiva, biyectiva). Un automorfismo es un endomorfismo biyectivo.*

Definición 1.4 *El núcleo de una aplicación lineal $f : V \to V'$ es el conjunto*

$$Ker(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{v \in V; f(v) = 0\}.$$

Teorema 1.5 *Una aplicación lineal es inyectiva si y sólo si $Ker(f) = \{0\}$.*

Proposición 1.6 *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal. Sea $X \subset V$ un conjunto finito de vectores. Si f es monomorfismo (resp. epimorfismo, isomorfismo) y X es linealmente independiente (resp. sistema de generadores, base), entonces $f(X)$ es linealmente independiente (resp. sistema de generadores, base).*

Corolario 1.7 *Sea* $f : V \to V'$ *una aplicación lineal. Si* f *es inyectiva (resp. sobreyectiva, biyectiva), entonces* $dim(V) \leq dim(V')$ *(resp.* $dim(V) \geq dim(V')$, $dim(V) = dim(V')$*).*

Proposición 1.8 *Sea* $f : V \to V'$ *una aplicación lineal y* B *una base de* V*. Si* $f(B)$ *es linealmente independiente (resp. sistema de generadores, base), entonces* f *es inyectiva (resp. sobreyectiva, biyectiva).*

Proposición 1.9 *La composición de monomorfismo (resp. epimorfismos, isomorfismo) es un monomorfismo (resp. epimorfismos, isomorfismo).*

Teorema 1.10 *Si* $f : V \to V'$ *es una aplicación lineal, entonces*

$$dim(V) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f)).$$

A la dimensión del núcleo se llama nulidad de f, $n(f)$, *y a la dimensión de la imagen de* f *se llama rango de* f, $r(f)$.

Corolario 1.11 *En una aplicación lineal* f, $r(f) \leq dim(V)$*. Además, si* U *es un subespacio de* V*, entonces* $dim(f(U)) \leq dim(U)$.

Corolario 1.12 *Sea* $f : V \to V'$ *una aplicación lineal tal que* $dim(V) = dim(V')$*. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. f *es inyectiva.*
2. f *es sobreyectiva.*
3. f *es biyectiva.*

Teorema 1.13 *Sea* $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *una base de un espacio vectorial* V *y* $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ *un subconjunto de vectores de un espacio* V'*. Entonces existe una única aplicación lineal* $f : V \to V'$ *tal que* $f(e_i) = v'_i$, $1 \leq i \leq n$.

Corolario 1.14 *Sean* V *y* V' *espacios vectoriales de dimensiones* n *y* m *respectivamente. Entonces existe un monomorfismo de* V *a* V' *(resp. epimorfismo, isomorfismo) si y sólo si* $n \leq m$ *(resp.* $n \geq m$, $n = m$*).*

Dos espacios vectoriales se llaman isomorfos si existe un isomorfismo entre ellos.

Corolario 1.15 *Dos espacios son isomorfos si y sólamente si tienen la misma dimensión.*

Corolario 1.16 *Sea V un espacio vectorial, $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base y $X = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset V$. Supongamos que*

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j, \ 1 \leq j \leq m.$$

Se considera $Y = \{(a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, (a_{m1}, \ldots, a_{mn})\}$. Entonces X es linealmente independiente (resp. sistema de generadores, base) si y sólamente si Y es linealmente independiente (resp. sistema de generadores, base) en $\mathbb{R}^n$.

2 Expresión matricial de una aplicación lineal

Definición 2.1 *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal, $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ y $B' = \{e'_1, \ldots, e_n\}$ bases de V y V' respectivamente. Supongamos que para cada $1 \leq j \leq n$ se tiene*

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i.$$

Se llama expresión matricial de f respecto de las bases B y B' a la matriz

$$M(f, B, B') = (a_{ij}).$$

Teorema 2.2 *El rango de f coincide con el rango de $M(f, B, B')$ para cualesquiera bases B y B' de V y V' respectivamente.*

Se considera ahora el conjunto de todas las aplicaciones lineales de un espacio V a otro V' y al que denotaremos por $L(V, V')$. Dotamos a este conjunto estructura de espacio vectorial del siguiente modo: si $f, g \in L(V, V')$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se define $f + g : V \to V'$ y $\lambda f : V \to V'$

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v).$$

$$(\lambda f)(v) = \lambda f(v).$$

Teorema 2.3 *El conjunto $L(V, V')$ es un espacio vectorial con esta suma y producto por escalares. Además la dimensión de $L(V, V')$ es $dim(V)dim(V')$.*

Concretamente, una base es la siguiente. Si $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ y $B' = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ son bases de V y V' respectivamente, la base es el conjunto de aplicaciones lineales $\{f_{ij} : V \to V'; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dadas por

$$f_{ij}(e_k) = \delta_{ik} e'_j.$$

Como consecuencia de la definición,

Corolario 2.4 *Sean f y g aplicaciones lineales entre V y V' y $\lambda \in \mathbb{R}$. Si B y B' son bases de V y V' respectivamente, entonces*

$$M(f+g, B, B') = M(f, B, B') + M(g, B, B'), \; M(\lambda f, B, B') = \lambda M(f, B, B').$$

Por otro lado, si $h : V' \to V''$ es otra aplicación lineal y B'' es base de V'', entonces

$$M(h \circ f, B, B'') = M(h, B', B'') M(f, B, B').$$

Definición 2.5 *Dos matrices A y C de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ se llaman equivalentes si representan la misma aplicación lineal, es decir, existe una aplicación lineal V^n en V'^m y bases B_1, B_2 de V, B'_1 y B'_2 de V' y $A = M(f, B_1, B_2)$, $C = M(f, B'_1, B'_2)$.*

Esto es equivalente a que existen matrices regulares $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ tales que $A = QCP$. Concretamente, $Q = M(1_{V'}, B'_2, B_2)$ y $P = M(1_V, B_1, B'_1)$.

Definición 2.6 *Dos matrices cuadradas A y C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se llaman semejantes si representan al mismo endomorfismo, es decir, existe un endomorfismo de V y bases B_1, B_2 de V $A = M(f, B_1, B_1)$, $C = M(f, B_2, B_2)$.*

Esto es equivalente a que existe una matriz regular $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A = P^{-1}CP$. Concretamente, $P = M(1_V, B_1, B_2)$.

Corolario 2.7 *Sean V^n y V'^m dos espacios vectoriales y B, B' sendas bases en ellos. La aplicación $\phi : L(V^n, V'^m) \to \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ dada por*

$$\phi(f) = M(f, B, B')$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. Además, esta aplicación ϕ satisface $\phi(f_{ij}) = E_{ji}$, donde E_{ji} es la matriz cuyos elementos son todos ceros excepto en el lugar (j, i), que es 1.

3 Formas lineales. Espacio dual

Definición 3.1 *Si V es un espacio vectorial, el espacio dual de V, y se denotará por V^*, es el espacio vectorial $V^* = L(V, \mathbb{R})$. A los elementos de V^* se llaman formas lineales de V.*

En particular, $dim(V^*) = dim(V)$.

Teorema 3.2 *Sea $f \in V^*$. Entonces*

1. *$f = 0$ o $Ker(f)$ es un hiperplano de V.*
2. *Las formas lineales de $\mathbb{R}^n$ son de la forma $f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots, a_nx_n$, para ciertos $a_i \in \mathbb{R}$.*
3. *Los hiperplanos de $\mathbb{R}^n$ son de la forma $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\}$ para ciertos $a_i \in \mathbb{R}$ no todos nulos.*
4. *Sea H un subespacio vectorial de un espacio V. Entonces H es un hiperplano si y sólo si es el núcleo de una forma lineal no nula de V.*
5. *Sean f, g dos formas lineales de un espacio V. Entonces f es proporcional a g si y sólo si sus núcleos coinciden.*

Sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de V. Consideramos la base B^* de V^* determinada en la sección 1 al tomar en $\mathbb{R}$ la base usual, es decir, $B^* = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, donde $\omega_i : V \to \mathbb{R}$ está definida mediante

$$\omega_i(e_j) = \delta_{ij}.$$

Definición 3.3 *A la base B^* se le llama la base dual de B.*

Definición 3.4 *Si U es un subespacio de V, se llama el anulador de U a*

$$an(U) = \{\omega \in V^*; \omega(v) = 0, v \in U\}.$$

Teorema 3.5 *Sea U un subespacio de un espacio vectorial V. Entonces U tiene dimensión k si y sólo existen $n - k$ formas lineales $\omega_1, \ldots, \omega_{n-k}$ linealmente independientes tales que*

$$U = \{v \in V; \omega_i(v) = 0, 1 \leq i \leq n - k\}.$$

En particular, $an(U) = < \omega_1, \ldots, \omega_{n-k} >$ y $dim(an(U)) = n - dim(U)$.

Teorema 3.6 *El espacio V^{**} es isomorfo de forma natural a V.*

Definición 3.7 *Si $f : V \to V'$ es una aplicación lineal, se llama traspuesta de f a la aplicación $f^t : V'^* \to V^*$ dada por $f(\omega)(v) = \omega(f(v))$. Si B y B' son bases de V y V' respectivamente, entonces*

$$M(f^t, B'^*, B^*) = M(f, B, B')^t.$$