Segundo Parcial de Geometría I

Doble Grado en Ingeniería Informática y en Matemáticas

18 de Diciembre de 2012

(1) Responder de forma razonada si son ciertas o no las siguientes afirmaciones:

(a) Si $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, el conjunto de matrices $\{A \in M_2(\mathbb{R}) \; : \; A \cdot C = 0\}$ es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$ de dimensión 2.

(b) El conjunto $\{A \in M_3(\mathbb{R}) \; : \; \det(A) = 0\}$ es un subespacio vectorial de $M_3(\mathbb{R})$.

(c) Sea V un espacio vectorial finito dimensional y $U \subset V$ un subespacio vectorial con $\dim(U) = k < \dim V$.

Entonces, de toda base B de V podemos extraer vectores $u_1, \ldots, u_k \in B$ tales que $B' = \{u_1, \ldots, u_k\}$ es base de U.

(2) Consideremos los subconjuntos de $\mathbb{R}_3[x]$ dados por:

$U = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \; : \; p''(0) = p(1) = 0\}$ y $W = L(\{x^2 - x^3, 2x^2 + x^3, x^2 + 2x^3\})$.

(a) Determinar bases de U y W, y calcular unas ecuaciones cartesianas de ambos subespacios en la base $B_0 = \{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$.

(b) Probar que $\mathbb{R}_3[x] = U \oplus W$.

(3) En un espacio vectorial V de dimension 3 consideramos una base $B_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$.

(a) Probar que los sistemas de vectores $B_1 = \{e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3\}$ y $B_2 = \{e_1 + e_2 - e_3, e_1 - e_2, e_1\}$ son bases de V.

(b) Calcular la matriz del cambio de base de B_1 a B_2, esto es, $M(I_V, B_1, B_2)$.

(c) Calcular las coordenadas del vector e_3 en las bases B_1 y B_2.

Soluciones:

1. (a) Verdadero. Llamamos U al conjunto. Es un subespacio, pues si $A, B \in U$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$(A+B)C = AC + BC = 0 + 0,\ (\lambda A)C = \lambda(AC) = \lambda 0 = 0.$$

Tiene dimensión 2. Explicitamos algo más U:

$$\begin{aligned} U &= \{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0\} \\ &= \{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); \begin{pmatrix} x+y & x+y \\ z+t & z+t \end{pmatrix} = 0\} \\ &= \{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); x+y=0, z+t=0\} \end{aligned}$$

Pero justantemente, $x+y=0$, y $z+t=0$ son las ecuaciones cartesianas de U en la base usual de $M_2(\mathbb{R})$. Las ecuaciones son linealmente independientes, pues la matriz de los coeficientes de las variables tiene rango 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la dimensión de U es $4-$(número de ecuaciones) $= 4-2 = 2$.

(b) Falso. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que están en el conjunto pero $A+B = I_3$, que tiene determinante 1.

(c) Falso. Sea $V = \mathbb{R}^2$, $U =< (1,1) >$ de dimensión $k=1$ y sea $B = \{(1,0),(0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$, pero ningún vector de B se encuentra en U.

2. (a) Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Entonces $p''(0) = 2a_2$ y $p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$. Por tanto $U = \{p(x) : a_2 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$. Como las ecuaciones cartesianas son linealmente independientes, U tiene dimensión igual a $dim(V)-$(número de ecuaciones) $= 4-2 = 2$. Pero la resolución del sistema da inmediatamente, $a_0 = -\lambda - \mu, a_1 = \lambda, a_2 = 0, a_3 = \mu$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Por tanto, $p(x) \in U$ si y sólo si

$$p(x) = (-\lambda - \mu) + \lambda x + \mu x^3 = \lambda(-1+x) + \mu(-1+x^3)$$

obteniendo que $\{-1+x, -1+x^3\}$ es la base buscada.

Para W, los vectores que aparecen son sistema de generadores. Veamos cuáles son linealmente independientes, escribiendo sus coordenadas en la base usual de $\mathbb{R}_3[x]$ y poniéndolo en una matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene dos columnas no proporcionales (las dos primeras son cero y no se usan para hallar el rango), luego tiene rango 2. Tomando el menor 2×2 no nulo de arriba a la derecha, y los vectores correspondientes, que son los dos primeros, se obtiene una base, a saber, $\{x^2 - x^3, 2x^2 + x^3\}$. También se podía haber razonado, sabiendo ya que la dimensión de W es 2, que dos vectores no proporcionales del sistema de generadores dan una base: en este caso, vale cualquier pareja.

Las ecuaciones cartesianas de U ya se han calculado: $a_2 = 0$ y $a_0 + a_1 + a_3 = 0$. Para W, tomamos la base que hemos calculado y trabajando en coordenadas respecto de B_0, se tiene que un vector (a_0, a_1, a_2, a_3) está en W si y sólamente si

$$r \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = 2,$$

es decir, si y sólamente si

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ a_0 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

Queda por tanto, $a_0 = 0$ y $a_1 = 0$, que son las ecuaciones buscadas.

(b) Estarán en suma directa si y sólamente si, la unión de una base de U con una de W, es una base $\mathbb{R}_3[x]$, o lo que es equivalente, a raíz de las bases ya halladas, si la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene rango 4. Pero su determinante es 3 (también se puede hacer el determinante por cajas, ver ejercicio de la relación del tema 1).

3. (a) Las coordenadas de los vectores de B_1 y B_2 respecto de B_0 son:

$$B_1 = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}, B_2 = \{(1,1,-1), (1,-1,0), (1,0,0)\}.$$

Serán base si al colocar las coordenadas en una matriz 3×3, dicha matriz tiene rango 3. Estas matrices son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los determinantes son, respectivamente, -2 y -1. Al ser no nulos, el rango es 3.

(b) Trabajamos en coordenadas respecto de la base B_0. Hay que hallar las coordenadas de cada uno de los vectores de $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ respecto de la base $\{(1,1,-1),(1,-1,0),(1,0,0)\}$. Así, para $(1,1,0)$ hay que resolver,

$$(1,1,0) = x(1,1,-1) + y(1,-1,0) + z(1,0,0).$$

Las soluciones que se obtienen para los tres vectores son, respectivamente, $(0,-1,2)$, $(-1,-1,3)$ y $(-1,-2,3)$. Luego la matriz buscada es

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Trabajando en coordenadas respecto de B_0, el problema es equivalente a hallar las coordenadas de $(0,0,1)$ respecto de las bases $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ y $\{(1,1,-1),(1,-1,0),(1,0,0)\}$, respectivamente. Es decir, resolver los dos sistemas siguientes:

$$(0,0,1) = x(1,1,0) + y(1,0,1) + z(0,1,1)$$

$$(0,0,1) = x(1,1,-1) + y(1,-1,0) + z(1,0,0).$$

Resolviendo, tenemos $(-1/2,1/2,1/2)$ y $(-1,-1,2)$.