GEOMETRÍA I. Examen final de febrero

– Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas –

Curso 2012/13

Nombre:

1. En cada caso, probar la afirmación o dar un ejemplo de que es falsa
   (a) Un S.E.L. compatible o tiene una única solución o tiene infinitas.
   (b) Si $U \subset V$ es un subespacio vectorial, entonces $U + U = U$.
   (c) Si V tiene dimensión 22, existe $f : V \to V$ lineal tal que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 15$.

2. Sea $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - z = 0, x + 2y + 2z = 0\}$. Hallar una base de un subespacio W tal que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$. Hallar la expresión analítica de una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{Ker}(f) = U$ e $\mathrm{Im}(f) = \{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a_{12} = 0, a_{11} + a_{22} = 0\}$.

3. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_2[x]$ dada por $M(f, B_u, B'_u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Hallar las ecuaciones cartesianas de $\mathrm{Im}(f)$.

4. Sea $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ dada por $\varphi(x, y, z) = x - y - 2z$. Extender a una base $\{\varphi, \alpha, \beta\}$ de $(\mathbb{R}^3)^*$ y hallar una base de $\mathrm{an}(\{\alpha, \beta\})$.

Razonar todas las respuestas

Soluciones

1. (a) Verdadero. Si $Ax = b$ es un SEL compatible, las soluciones vienen dadas por $S = \{x_0 + u; u \in U\}$, donde x_0 es una solución cualquiera (que se ha fijado) y U es un subespacio vectorial de dimensión $n - r$, con $r = r(A)$ y n es el número de incógnitas. Por tanto, hay tantas soluciones como vectores u hay en U. Sólo hay dos posibilidades. Si $dim(U) = 0$, entonces, entonces U tiene sólo un vector y por tanto $\#(S) = 1$ o $dim(U) \geq 1$. Pero se sabe de clase que un espacio vectorial que no es trivial tiene infinitas soluciones.

   (b) Verdadero. Se hace por doble inclusión. Sea $u + v \in U + U$, con $u, v \in U$. Ya que U es un subespacio vectorial, $u + v \in U$. Esto prueba $U + U \subset U$. Sea ahora $u \in U$. Como $u = u + 0 \in U + U$, probado $U \subset U + U$.

   (c) Verdadero. Sea $B = \{e_1, \ldots, e_{22}\}$ una base de V. Se define f diciendo cuáles son las imágenes de los elementos de B. Se sabe que la dimensión de $\mathrm{Im}(f)$ tiene que ser 7, luego se coge 7 vectores linealmente independientes de V, $\{v_1, \ldots, v_7\}$, lo cual es posible pues $dim(V) = 22 \geq 7$. Se define $f(e_i) = 0$ para $1 \leq i \leq 15$ y $f(e_i) = v_i$, $16 \leq i \leq 22$. Por la definición, $e_i \in \mathrm{Ker}(f)$, luego $n(f) \geq 15$. Por otro lado, se sabe que un sistema de generadores de $\mathrm{Im}(f)$ es $f(B)$, es decir, $\{v_1, \ldots, v_7\}$, luego $r(f) \geq 7$. Pero como $n(f) + r(f) = 22$, entonces $n(f) = 15$ y $r(f) = 7$.

2. (a) Hallamos un base de U resolviendo el sistema. Como la submatriz de los coeficientes x e y tiene rango 2, tomamos $z = \lambda$, quedando $2x - y = \lambda$, $x + 2y = -2\lambda$. Multiplicando la primera fila por 2 y sumando, se tiene $5x = 0$, luego $x = 0$, $y = -\lambda$ y $z = \lambda$. Por tanto,

$$U = \{\lambda(0, -1, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\} =< (0, -1, 1) > .$$

   Ampliamos a una base de $\mathbb{R}^3$ formando una matriz triangular superior, por ejemplo (y reordenando filas) $\{e_1 = (0, -1, 1), e_2 = (1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$. Se sabe que $W =< (1, 0, 0), (0, 0, 1) >$ es un subespacio en suma directa con U.

   (b) Hallamos una base de $\mathrm{Im}(f)$. Sabiendo cómo está definido dicho subespacio, tenemos

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a_{11}, a_{21} \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : a_{11}, a_{21} \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Por tanto, ambas matrices son sistema de generadores y como no son proporcionales, son base, es decir, una base de $\mathrm{Im}(f)$ es $\{v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$. Definimos ahora f en las condiciones que pide el ejercicio:

$$\begin{aligned} f:(0,-1,1) &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ f:(1,0,0) &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ f:(0,0,1) &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comprobamos que f satisface lo que queremos (razonamiento parecido a 1. (c)). Por un lado, $(0,-1,1) \in \mathrm{Ker}(f)$, luego $n(f) \geq 1$. Por otro lado, $\{v_1, v_2\} \subset \mathrm{Im}(f)$, luego $r(f) \geq 2$. Pero como $n(f) + r(f) = 3$, entonces tenemos igualdades $n(f) = 1$, $r(f) = 2$, como se quería.

Queda, finalmente, hallar la expresión analítica de f. Sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Para hallar $f(x,y,z)$, escribimos $(x,y,z) = ae_1 + be_2 + ce_3$. Entonces, y por la forma que viene dada f, $f(x,y,z) = af(e_1) + bf(e_2) + cf(e_3) = bv_1 + cv_2$. Calculamos, pues, las coordenadas: de $(x,y,z) = ae_1 + be_2 + ce_3$, tenemos $b = x, -a = y, a + c = z$. Resolviendo, $a = -y, b = x, c = y + z$. Por tanto,

$$f(x,y,z) = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + (y+z) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y+z & -x \end{pmatrix}$$

3. Se sabe que si B es una base de $\mathbb{R}^2$, entonces $f(B)$ es un sistema de generadores de $\mathrm{Im}(f)$. Tomamos $B = B_u = \{(1,0),(0,1)\}$. Por tanto,

$$f(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, y sabiendo que las imágenes son coordenadas respecto de B'_u, $\mathrm{Im}(f) =< 1 + X^2, 2 + 2X^2\} >$. Pero como son propocionales, se tiene que una base de $\mathrm{Im}(f)$ es $\{1 + X^2\}$. Como tiene dimensión 1, hay $3 - 1 = 2$ ecuaciones cartesianas que vienen dadas por la propiedad

$$r \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \\ 1 & z \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & z \end{vmatrix} = 0,$$

es decir, $y = 0, x - z = 0$.

4. Sea $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ la base usual de $\mathbb{R}^3$, $B_u^* = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ su base dual, es decir, $\omega_1(x,y,z) = x$, $\omega_2(x,y,z) = y$ y $\omega_3(x,y,z) = z$. Si φ es una forma lineal, se sabe que sus coordenadas respecto de B_u^* son $(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3))$. En nuestro caso, son $(1,-1,2)$. Extendemos este vector a una base de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo, $\{(1,-1,2),(0,1,0),(0,0,1)\}$ (la matriz correspondiente es triangular) y por tanto, los dos últimos vectores representan coordenadas respecto de B_u^*, luego $\alpha = \omega_2$ y $\beta = \omega_3$.

   Por otro lado, se sabe que $\dim(an(\{\alpha,\beta\})) = 3 - 2 = 1$. De la propia definición,

   $$an(\{\alpha,\beta\}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \alpha(x,y,z) = \beta(x,y,z) = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = z = 0\}.$$

   Resolviendo el sistema, es evidente que $\{(1,0,0)\}$ es la base buscada.