Relación de ejercicios de los temas 1 y 2

Asignatura: Curvas y Superficies
Grado en Matemáticas
Grupo: 3^0-B
Profesor: Rafael López Camino

(Do Carmo, sección 1.2)

1. Encontrar una parametrización $\alpha(t)$ de la curva cuya traza es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ tal que $\alpha(t)$ recorre el círculo en el sentido de las agujas del reloj con $\alpha(0) = (0, 1)$.

2. Sea $\alpha(t)$ una curva parametrizada que no pasa por el origen. Si $\alpha(t_0)$ es el punto de la traza de α más cercano al origen y $\alpha'(t_0) \neq 0$, demostrar que el vector de posición $\alpha(t_0)$ es ortogonal a $\alpha'(t_0)$.

3. Una curva parametrizada $\alpha(t)$ tiene la propiedad de que su segunda derivada $\alpha''(t)$ es idénticamente cero. ¿qué puede decirse sobre α?

4. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada y $v \in \mathbb{R}^3$ un vector fijo. Supongamos que $\alpha'(t)$ es perpendicular a v para to $t \in I$ y que $\alpha(0)$ también ortogonal a v. Probar que $\alpha(t)$ es ortogonal a v para todo $t \in I$.

5. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada con $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Probar que $|\alpha(t)|$ es una constante no cero si y sólo si $\alpha(t)$ es ortogonal a $\alpha'(t)$ para todo $t \in I$.

(Do Carmo, sección 1.3)

1. Demostrar que las rectas tangentes a la curva parametrizada regular $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ hacen un ángulo constante con la recta $y = 0$, $z = x$.

2. Un disco circular de radio 1 en el plano xy rueda sin deslizarse a lo largo del eje x. La figura descrita por un punto de la circunferencia del disco es llamada una cicloide.

(a) Obtener una curva parametrizada $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ cuya traza es la cicloide y determinar sus puntos singulares.

(b) Calcular la longitud del arco correspondiente a una vuelta completa del disco.

3. Sea $OA = 2a$ el diámetro de una circunferencia $\mathbb{S}^1$ y OY y AV las tangentes a $\mathbb{S}^1$ en O y A respectivamente. Se dibuja una semirrecta r desde O que corta a $\mathbb{S}^1$ en C y la recta AV en B. En OB marcamos el punto p tal que $|Op| = |CB|$. Si rotamos r alrededor de O, considerando todas las semirrectas r, los correspondientes puntos p describirán una curva llamada la *cisoide de Diocles*. Tomando OA el eje x y OY el eje y, probar que

   (a) La traza de
   $$\alpha(t) = \left(\frac{2at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2} \right), \ t \in \mathbb{R},$$
   es la cisoide de Diocles ($t = \tan\theta$).

   (b) El origen $(0, 0)$ es un punto singular de la cisoide.

   (c) Si $t \to \infty$, $\alpha(t)$ se aproxima a la recta $x = 2a$ y $\alpha'(t) \to (0, 2a)$. Por tanto, si $t \to \infty$, la curva y su tangente se aproximan a la recta $x = 2a$: decimos que $x = 2a$ es una asíntota de la cisoide.

4. Sea $\alpha : (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$ dada por
   $$\alpha(t) = \left(\sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2} \right),$$
   donde t es el ángulo que hace el eje y con el vector $\alpha'(t)$. La traza de α es llamada *tractriz*. Demostrar que

   (a) α es una curva parametrizada regular excepto en $t = \pi/2$.

   (b) La longitud del segmento de la tangente de la tractriz entre el punto de tangencia y el eje y es constantemente igual a 1.

5. Sea $\alpha : (-1, \infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por
   $$\alpha(t) = \left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3} \right).$$
   Probar que:

(a) Para $t = 0$, α es tangente al eje x.

(b) Si $t \to \infty$, $\alpha(t) \to (0, 0)$ y $\alpha'(t) \to (0, 0)$.

(c) Tomar la curva con la orientación opuesta. Ahora, si $t \to -1$, la curva y su tangente se aproximan a la recta $x + y + a = 0$.

La figura obtenida completando la traza de α de forma que sea simétrica respecto de la recta $y = x$ es llamada la *folium de Descartes*.

6. Sea $\alpha(t) = (ae^{bt} \cos t, ae^{bt} \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, a y b constantes, $a > 0, b < 0$.

   (a) Demostrar que si $t \to \infty$, $\alpha(t)$ se aproxima al origen dando vueltas respecto del mismo. La traza de α se llama la espiral logarítmica.

   (b) Demostrar que $\alpha'(t) \to (0, 0)$ si $t \to \infty$ y que

   $$\lim_{t \to \infty} \int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)| \, dt$$

   es finito, esto es, α tiene longitud finita en $[t_0, \infty)$.

7. Sea$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada. Sea $[a, b] \subset I$ y $\alpha(a) = p$, $\alpha(b) = q$.

   (a) Demostrar que para cualquier vector constante v, $|v| = 1$,

   $$\langle q - p, v \rangle = \int_a^b \langle \alpha'(t), v \rangle \, dt \leq \int_a^b |\alpha'(t)| \, dt.$$

   (b) Sea

   $$v = \frac{q - p}{|q - p|}.$$

   Demostrar que

   $$|\alpha(b) - \alpha(a)| \leq \int_a^b |\alpha'(t)| \, dt,$$

   esto es, la curva de longitud más pequeña entre $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$ es la línea recta que los une.

(Do Carmo, sección 1.5)

Suponemos que $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva parametrizada por la longitud de arco s, con curvatura $\kappa(s) \neq 0$ para todo $s \in I$.

1. Sea la hélice
$$\alpha(s) = \left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, b\frac{s}{c}\right), \quad s \in \mathbb{R},$$
donde $c^2 = a^2 + b^2$.

   (a) Demostrar que el parámetro s es la longitud de arco.

   (b) Determinar la curvatura y torsión de α.

   (c) Determinar el plano osculatriz de α.

   (d) Demostrar que las rectas conteniendo $N(s)$ y que pasan por $\alpha(s)$ intersecan el eje z con un ángulo constante igual a $\pi/2$.

   (e) Demostrar que las rectas tangentes a α hacen un ángulo constante con el eje z.

2. Demostrar que la torsión τ de α está dada por
$$\tau(s) = \frac{\langle \alpha'(s) \times \alpha''(s), \alpha'''(s)\rangle}{|\kappa(s)|^2}.$$

3. Supongamos que $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^2$, esto es, α es una curva plana y damos a κ un signo. Transportamos los vectores $T(s)$ paralelos de forma que los orígenes de $T(s)$ coinciden con el origen de $\mathbb{R}^2$. Los puntos finales de $T(s)$ describen una curva parametrizada $s \longmapsto T(s)$ llamada la *indicatriz* de tangentes de α. Sea $\theta(s)$ el ángulo de $e_1 = (1, 0)$ a $T(s)$ en la orientación de $\mathbb{R}^2$

   (a) Probar que la indicatriz de tangentes es una curva parametrizada regular.

   (b) Probar que $T'(s) = \theta'(s)N(s)$, esto es, $\kappa(s) = \theta'(s)$.

4. Supongamos que todos los vectores normales de una curva parametrizada pasan por un punto fijo. Probar que la traza de la curva está contenida en una circunferencia.

5. Una curva parametrizada regular α tiene la propiedad de que todas sus rectas tangentes pasan por un punto fijo.

   (a) Probar que la traza de α es un segmento de una recta.

   (b) ¿Sigue siendo cierta la conclusión si α no es regular?

6. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva plana y regular, no necesariamente parametrizada por el arco. Supongamos que $\kappa(t) \neq 0$, $t \in I$. La curva

$$\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)} N(t), \quad t \in I$$

se llama la *evoluta* de α.

   (a) Demostrar que el vector tangente en t de la evoluta de α es el normal a α en t.

   (b) Consideramos las rectas normales de α en dos puntos t_1, t_2, $t_1 \neq t_2$. Aproximamos t_1 hacia t_2. Demostrar que los puntos intersección de los normales convergen a un punto en la traza de la evoluta de α.

7. La traza de la curva parametrizada

$$\alpha(t) = (t, \cosh t), \quad t \in \mathbb{R},$$

se llama *catenaria*.

   (a) Demostrar que la curvatura de la catenaria es

$$\kappa(t) = \frac{1}{\cosh^2 t}.$$

   (b) Demostrar que la evoluta de la catenaria es

$$\beta(t) = (t - \sinh\ t \cosh t, 2 \cosh t).$$

8. Consideramos la aplicación

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-1/t^2}), & t > 0 \\ (t, e^{-1/t^2}, 0), & t < 0 \\ (0, 0, 0) & t = 0 \end{cases}$$

   (a) Probar que α es diferenciable.

   (b) Probar que α es regular para todo t y que $\kappa(t) \neq 0$ para $t \neq 0$, $t \neq \pm\sqrt{2/3}$ y $\kappa(0) = 0$.

   (c) Demostrar que el límite de los planos osculatrices cuando $t \to 0^+$ es el plano $y = 0$, pero si $t \to 0^-$, es el plano $z = 0$.

(d) Demostrar que τ puede definirse para que $\tau = 0$, aunque α no es una curva plana.

9. Supongamos que una curva está dada en coordenadas polares $\rho = \rho(\theta)$; $a \leq \theta \leq b$.

   (a) Probar que el arco de longitud es

   $$\int_a^b \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\theta.$$

   (b) Demostrar que la curvatura es

   $$\kappa(\theta) = \frac{2(\rho')^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{((\rho')^2 + \rho^2)^{3/2}}.$$

10. Supongamos que $\tau(s) \neq 0$ y que $\kappa'(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que $\alpha(I)$ se encuentre en una esfera es que

    $$R^2 + (R')^2 T^2 = \text{constante},$$

    donde $R = 1/\kappa$, $T = 1/\tau$ y $R' = R'(s)$.

11. Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ una curva regular. Supongamos que existe t_0, $a < t_0 < b$ tal que la distancia $|\alpha(t)|$ desde el origen a la traza de α tiene un máximo en t_0. Probar que la curvatura κ de α en t_0 satisface $|\kappa(t_0)| \geq 1/|\alpha(t_0)|$.

12. Demostrar que conocer la función $s \longmapsto B(s)$, donde $B(s)$ es el vector binormal de una curva α con torsión no cero en todo punto, determina la curvatura $\kappa(s)$ y el valor absoluto de la torsión $\tau(s)$ de α.

13. Demostrar que conocer la función $s \longmapsto N(s)$, donde $N(s)$ es el vector normal de una curva α con torsión no cero en todo punto, determina la curvatura $\kappa(s)$ y la torsión $\tau(s)$ de α

14. De manera general, una curva α se llama *hélice* si las rectas tangentes de α hacen un ángulo constante con una dirección fija. Supongamos que $\tau(s) \neq 0$, $s \in I$. Probar que:

    (a) α es una hélice si y sólo si κ/τ es constante.

(b) α es una hélice si y sólo si las rectas conteniendo $N(s)$ y pasando por $\alpha(s)$ son paralelas a un plano fijo.

(c) α es una hélice si y sólo si las rectas conteniendo $B(s)$ y pasando por $\alpha(s)$ hacen un ángulo constante con una dirección fija.

(d) La curva

$$\alpha(s) = \left(\frac{a}{c} \int \sin\theta(s)\ ds, \frac{a}{c} \int \cos\theta(s)\ ds, \frac{b}{c} s \right),$$

donde $c^2 = a^2 + b^2$ es una hélice y que $\kappa/\tau = a/b$.

15. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada regular no necesariamente p.p.a. con $\kappa(t) \neq 0$, $\tau(t) \neq 0$, $t \in I$. La curva α se llama una *curva de Bertrand* si existe una curva $\bar{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ tal que las rectas normales de α y $\bar{\alpha}$ en $t \in I$ son iguales. En este caso, $\bar{\alpha}$ se llama la *compañera Bertrand* de α y podemos escribir

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + r(t)N(t).$$

Probar que:

(a) r es constante.

(b) α es una curva Bertrand si y sólo si existe una relación lineal

$$A\kappa(t) + B\tau(t) = 1, \quad t \in I,$$

donde A, B son constantes no nulas.

(c) Si α tiene más de una compañera Bertrand, entonces tiene infinitas. Este caso ocurre si y sólo α es una hélice circular.

(Montiel-Ros; sección 1.2)

1. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva y $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un movimiento rígido. Probar que $L_a^b(\alpha) = L_a^b(M \circ \alpha)$. Es decir, los movimientos rígidos conservan la longitud de las curvas.

2. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva y $[a, b] \subset I$. Probar que

$$|\alpha(a) - \alpha(b)| \leq L_a^b(\alpha).$$

O sea, las rectas son las curvas más curvas que unen dos puntos dados.

3. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva. Demostrar que

$$L_a^b(\alpha) = \sup\{L_a^b(\alpha, P) : P \text{ es una partición de } [a, b]\}.$$

4. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva tal que $|\alpha'(t)| = 1$ para todo $t \in I$. ¿Qué relación existe entre el parámetro t y la longitud $L_a^t(\alpha)$, con $a \in I$? De una curva con la propiedad anterior se dice que está parametrizada por el arco.

5. Sea $\phi : J \to I$ un difeomorfismo y $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva. Dado $[a, b] \subset J$ con $\phi([a, b]) = [c, d]$, demostrar que $L_a^b(\alpha \circ \phi) = L_c^d(\alpha)$.

(Montiel-Ros; sección 1.3)

1. Considérese la espiral logarítmica $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (ae^{bt} \cos t, ae^{bt} \sin t)$$

con $a > 0$, $b < 0$. Calcular, para $t_0 \in \mathbb{R}$, la función longitud de arco $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ relativa a t_0. Reparametrizar esta curva por el arco y estudiar su traza.

(Montiel-Ros; sección 1.4)

1. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a. y $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un movimiento rígido. Si llamamos β a la curva $M \circ \alpha$ probar que

$$\kappa_\beta(s) = \begin{cases} \kappa_\alpha(s) & \text{para todo } s \in I \text{ si } M \text{ es directo} \\ -\kappa_\alpha(s) & \text{para todo } s \in I \text{ si } M \text{ es inverso.} \end{cases}$$

2. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a. Probar que α es un segmento de recta o un arco de circunferencia si y sólo si la curvatura de α es constante.

3. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a. Si existe una función diferenciable $\theta : I \to$ tal que $\theta(s)$ es el ángulo que forma la recta tangente a α en s con una dirección fija, demostrar que $\theta'(s) = \pm\kappa(s)$.

4. Sean $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^2$ dos curvas p.p.a. tales que $\kappa_\alpha(s) = -\kappa_\beta(s)$ para cada $s \in I$. Probar que existe un movimiento rígido inverso $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\beta = M \circ \alpha$.

5. Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ es una curva p.p.a. definida en un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ que contiene al origen y es simétrica respecto de él, definimos otra curva $\beta : I \to \mathbb{R}^2$ por la igualdad $\beta(s) = \alpha(-s)$ para cada $s \in I$. Probar que β está p.p.a. y que $\kappa_\beta(s) = -\kappa_\alpha(-s)$ para cada $s \in I$.

6. Sea $a \in \mathbb{R}^+$ y $\alpha : (-a, a) \to \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a. con $\kappa_\alpha(s) = \kappa_\alpha(-s)$ para cada $s \in (-a, a)$. Probar que la traza de α es simétrica respecto de la recta normal de α en 0.

7. Sea $a \in \mathbb{R}^+$ y $\alpha : (-a, a) \to \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a. con $\kappa_\alpha(s) = -\kappa_\alpha(-s)$ para cada $s \in (-a, a)$. Probar que la traza de α es simétrica respecto del punto $\alpha(0)$.

(Montiel-Ros; sección 1.5)

1. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a. Probar que α es un segmento de recta si y sólo si la curvatura de α es nula en cada punto.

2. Demostrar que una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ p.p.a. con $\kappa(s) > 0$ para cada $s \in I$ es plana si y sólo si su torsión es idénticamente nula.

3. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a. y $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un movimiento rígido. Si ponemos $\beta = M \circ \alpha$, probar que

$$\kappa_\beta(s) = \kappa_\alpha(s) \text{ y } \tau_\beta(s) = \begin{cases} \tau_\alpha(s) & \text{para todo } s \in I \text{ si } M \text{ es directo} \\ -\tau_\alpha(s) & \text{para todo } s \in I \text{ si } M \text{ es inverso.} \end{cases}$$

4. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a. con curvatura positiva definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ simétrico respecto del origen. Se define otra curva $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ por $\beta(s) = \alpha(-s)$, para cada $s \in I$. Demostrar que β está p.p.a. y que $\kappa_\beta(s) = \kappa_\alpha(s)$ y $\tau_\beta(s) = \tau_\alpha(-s)$ para cada $s \in I$.

5. Sean $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^3$ dos curvas p.p.a. con $\kappa_\alpha(s) = \kappa_\beta(s) > 0$ y $\tau_\alpha(s) = -\tau_\beta(s)$ para cada $s \in I$. Probar que existe un movimiento rígido inverso $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\beta = M \circ \alpha$.

6. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a. con $\kappa(s) > 0$ para cada $s \in I$. Probar que α es un arco de hélice circular o un arco de circunferencia si y sólo si la curvatura y la torsión de α son constantes.

(Montiel-Ros; relación de ejercicios 1.6)

1. Sean $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva plana regular y $a \in \mathbb{R}^2 - \alpha(I)$. Si existe $t_0 \in I$ tal que $|\alpha(t) - a| \geq |\alpha(t_0) - a|$ para cada $t \in I$, probar que la recta que une el punto a con $\alpha(t_0)$ es perpendicular a α en t_0.

2. Sean $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva plana regular y R una recta de $\mathbb{R}^2$. Si existe $t_0 \in I$ tal que la distancia de $\alpha(t)$ a R es mayor o igual que la distancia de $\alpha(t_0)$ a R para cada $t \in I$, y que $\alpha(t_0) \notin R$, probar que la recta tangente a α en t_0 es paralela a R.

3. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva plana regular. Sea $[a, b] \subset I$ tal que $\alpha(a) \neq \alpha(b)$. Probar que existe $t_0 \in (a, b)$ tal que la recta tangente a α en t_0 es paralela al segmento de recta que une $\alpha(a)$ con $\alpha(b)$. (Esto es una generalización del conocido teorema de Rolle del análisis)

4. Probar que una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ p.p.a. es un segmento de recta si y sólo si todas sus rectas tangentes son concurrentes.

5. Probar que una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ p.p.a. es un arco de circunferencia si y sólo si todas sus rectas normales pasan por un punto.

6. Probar que una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ p.p.a. es un segmento de recta o un arco de circunferencia si y sólo si todas sus rectas tangentes equidistan de un punto.

7. Dada una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ p.p.a., demostrar que todas las rectas normales de α equidistan de un punto si y sólo si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\kappa(s) = \pm \frac{1}{\sqrt{as + b}}$$

   para cada $s \in I$.

8. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a. y sea $s_0 \in I$. Definimos $f : I \to \mathbb{R}$ por

$$f(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), N(s_0) \rangle$$

   que mide la distancia orientada del punto $\alpha(s)$ a la recta tangente a α en s_0. Probar que $f(s_0) = 0$, $f'(s_0) = 0$ y $f''(s_0) = \kappa(s_0)$. Deducir de aquí lo siguiente:

(a) Si $\kappa(s_0) > 0$, existe un entorno J de s_0 en I tal que $\alpha(J)$ está en el semiplano determinado por la recta tangente a α en s_0 hacia el que apunta $N(s_0)$.

(b) Si existe un entorno J de s_0 en I tal que $\alpha(J)$ está en el semiplano determinado por la recta tangente a α en s_0 hacia el que apunta $N(s_0)$, entonces $\kappa(s_0) \geq 0$.

9. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a. y $s_0 \in I$ con $\kappa(s_0) > 0$. Sea $a_\lambda = \alpha(s_0) + \lambda N(s_0)$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, un punto sobre la recta normal a α en s_0. Definimos la función $f_\lambda : I \to \mathbb{R}$ por

$$f_\lambda(s) = |\alpha(s) - a_\lambda|^2$$

que mide la distancia al cuadrado de los puntos de la curva al punto a_λ. Demostrar que $f_\lambda(s_0) = \lambda^2$, $f'_\lambda(s_0) = 0$ y $f''_\lambda(s_0) = 2(1 - \lambda\kappa(s_0))$. Concluir de aquí que:

(a) Si $\lambda < \frac{1}{\kappa(s_0)}$, existe un entorno J de s_0 en I tal que $\alpha(J)$ está fuera de la circunferencia de centro a_λ y radio $|\lambda|$.

(b) Si $\lambda > \frac{1}{\kappa(s_0)}$, existe un entorno J de s_0 en I tal que $\alpha(J)$ está dentro de la circunferencia de centro a_λ y radio λ.

Así vemos cómo la circunferencia de centro $\alpha(s_0)+\frac{1}{\kappa(s_0)}N(s_0)$ y radio $\frac{1}{\kappa(s_0)}$ es la que mejor aproxima a la curva en un entorno de $\alpha(s_0)$. A esta circunferencia la llamaremos *circunferencia osculatriz*, a su radio, radio de curvatura y a su centro, centro de curvatura. A la curva formada por todos los centros de curvatura de α, $\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}N(s)$, supuesto $\kappa(s) > 0$, la llamaremos *evoluta* de α.

10. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a. con $\kappa(s) > 0$ para cada $s \in I$. Probar que todas las circunferencias osculatrices de α pasan por un mismo punto si y sólo si α es un arco de circunferencia.

11. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a. con $\kappa(s) > 0$ para cada $s \in I$. Probar que todas las rectas normales de α equidistan de un punto si y sólo si la evoluta de α es una circunferencia. En este caso se dice que α es una evolvente o desarrollante de la circunferencia.

12. Supongamos que una curva plana $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ p.p.a. tiene curvatura positiva y no decreciente. Sea $\beta : I \to \mathbb{R}^2$ su evoluta. Probar que

$$L_a^s(\beta) = \frac{1}{\kappa(a)} - \frac{1}{\kappa(s)}$$

para $a \in I$ arbitrario y $s \in I$ con $s \geq a$.

13. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a. con curvatura positiva y no decreciente y sea β su evoluta. Si $a \in I$, probar que

$$|\alpha(s) - \beta(a)| \leq \frac{1}{\kappa(a)}$$

para cada $s \in I$ con $s \geq a$, o sea, $\alpha([a, \infty) \cap I)$ está contenido en el círculo osculador de α en a.

14. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a. y sea $a \in \mathbb{R}^2 - \alpha(I)$. Si existe $s_0 \in I$ tal que $|\alpha(s) - a| \leq |\alpha(s_0) - a|$ para todo $s \in I$, probar que

$$|\kappa(s_0)| \leq \frac{1}{|\alpha(s_0) - a|}.$$

15. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva plana p.p.a. tal que $\alpha(\mathbb{R})$ está contenida en un disco cerrado de radio $r > 0$ y $|\kappa(s)| \leq 1/r$ para cada $s \in \mathbb{R}$. Probar que:

    (a) La función $f(s) = |\alpha(s) - a|^2$, donde a es el centro del disco, está acotada superiormente y cumple $f''(s) \geq 0$ para cada $s \in \mathbb{R}$.

    (b) Cualquier función diferenciable acotada superiormente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f''(s) \geq 0$ es constante.

    Deducir de esto que α es la circunferencia de centro a y radio $r > 0$.

16. (Comparación de dos curvas en un punto) Sean α y β dos curvas regulares planas definidas en sendos intervalos de $\mathbb{R}$ que contienen al origen. Supongamos que $\alpha(0) = \beta(0) = p$ y que $\alpha'(0) = \beta'(0)$, o bien que $N_\alpha(0) = N_\beta(0)$, es decir, que α y β son tangentes en p y estáon igualmente orientadas. Decimos que α está por encima de β en p si existe un entorno de $0 \in \mathbb{R}$ en el cual $\alpha(s) - \alpha(0), N_\alpha(0)\rangle \geq \langle \beta(s) - \beta(0), N_\beta(0)\rangle$. Demostrar que

    - Si α está por encima de β en p entonces $\kappa_\alpha(0) \geq \kappa_\beta(0)$.

- Si $\kappa_\alpha(0) > \kappa_\beta(0)$, entonces α está por encima de β en p.

17. Dos curvas regulares planas α y β definidas en sendos intervalos que contienen a cero, se cortan transversalmente en $p = \alpha(0) = \beta(0)$ si $\alpha'(0) \neq \beta'(0)$. Probar que, si esto ocurre, las trazas de α_t y de β se cortan para t suficientemente pequeño, donde α_t es la curva dada por $\alpha_t(u) = \alpha(u) + ta$, $a \in \mathbb{R}^2$, $|a| = 1$.

18. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ p.p.a. con curvatura positiva. Entonces α es un arco de circunferencia si y sólo si tiene curvatura constante y su traza está contenida en un esfera.

19. Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ p.p.a. con curvatura positiva y $s \in I$, se llama *recta binormal* de α en s a la recta que pasa por $\alpha(s)$ con dirección $B(s)$. Supongamos que $\alpha(I)$ está contenida en una esfera y que todas las rectas binormales de α son tangentes a esa esfera. Probar que α es un arco de círculo máximo.

20. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ p.p.a. con curvatura positiva. Si la traza de α está contenida en una esfera y tiene torsión constante a, demostrar que existen $b, c \in \mathbb{R}$ tales que
$$\kappa(s) = \frac{1}{b\cos(a^2 s) + c\sin(a^2 s)}.$$

21. Se dice que una curva p.p.a. $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ con curvatura positiva es una hélice cuando todas sus rectas normales son perpendiculares a una dirección dada. Probar que α es una hélice si y sólo si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\tau(s) = a\kappa(s)$ para cada $s \in I$. Este resultado se conoce con el nombre de *teorema de Lancret*.

22. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ p.p.a. con curvatura positiva, $\kappa'(s) \neq 0$ y $\tau(s) \neq 0$ para cada $s \in I$. Probar que la traza de α está contenida en una esfera de radio $r > 0$ si y sólo si
$$\frac{1}{\kappa(s)^2} + \frac{\kappa'(s)^2}{\kappa(s)^4 \tau(s)^2} = r^2.$$

23. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ p.p.a., con curvatura positiva y contenida en una esfera de radio $r > 0$. Si $s_0 \in I$, probar que son equivalentes:

    (a) $\kappa'(s_0) = 0$,

    (b) $\kappa(s_0) = 1/r$ o bien $\tau(s_0) = 0$.

24. Se llama *plano osculador* de una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ p.p.a. (con curvatura positiva) en $s \in I$, al plano que pasa por $\alpha(s)$ y tiene como vector normal a $B(s)$. Sea $s_0 \in I$. Si existe un plano P que pasa por $\alpha(s_0)$, contiene a la recta tangente a α en s_0 y tal que, para todo entorno J de s_0 en I, $\alpha(J)$ corta a los dos semiespacios abiertos determinados por P, demostrar que P coincide con el plano osculador de α en s_0.

25. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ p.p.a. con curvatura positiva. Demostrar que son equivalentes las dos afirmaciones siguientes:

    (a) Todos los planos osculadores de α son concurrentes.

    (b) La curva α es plana.

26. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a. con curvatura positiva. Probar que existe una curva $\omega : I \to \mathbb{R}^3$ tal que las ecuaciones de Frenet de α se pueden poner de la siguiente forma:

$$T'(s) = \omega(s) \times T(s) \quad N'(s) = \omega(s) \times N(s) \; B'(s) = \omega(s) \times B(s).$$

    El vector $\omega(s)$ se llama *velocidad angular* de α en s.

27. Con las hipótesis del ejercicio anterior, probar que $\omega(s)$ es constante si y sólo si α es un arco de hélice circular.