Tema 4:

CONTINUIDAD

Prof. Rafael López Camino
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Material docente para el alumno
Asignatura: Fundamentos matemáticos para el estudio del medio ambiente. Curso 2004/05
Licenciatura: Ciencias ambientales
Universidad de Granada

1. Calculad los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 2}(x^3+2x-1) \qquad b)\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4} \qquad c)\ \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$d)\ \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3x-2}} \qquad e)\ \lim_{x\to 0}\frac{1+10^{-1/x}}{2+10^{-1/x}} \qquad f)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-x}{x}$$

$$g)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6} \qquad h)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x} \qquad i)\ \lim_{x\to 0}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$$

2. Calculad los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-2}{4x^3-1} \qquad b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}} \qquad c)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$d)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{4x-5} \qquad e)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+5x+6}{x+1} \qquad f)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$$

3. Calculad los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 3^+}\frac{x-1}{(8x+3)(x-2)} \qquad b)\ \lim_{x\to 3^-}\frac{x-1}{(8x+3)(x-2)} \qquad c)\ \lim_{x\to 2^+}\frac{x-1}{(8x+3)(x-2)}$$

$$d)\ \lim_{x\to 2^-}\frac{x-1}{(8x+3)(x-2)} \qquad e)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{2}{1+e^{-1/x}} \qquad f)\ \lim_{x\to 0^-}\frac{2}{1+e^{-1/x}}$$

$$g)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{cotg(x)}+1}{e^{cotg(x)-1}} \qquad h)\ \lim_{x\to 0^-}\frac{e^{cotg(x)}+1}{e^{cotg(x)-1}}$$

4. Estudiad la continuidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}(\frac{1}{x}), & x<0\\ \operatorname{arctg}(x)-1, & 0\le x\le\frac{2}{\pi}\\ \operatorname{arctg}(x)-\operatorname{sen}(\frac{1}{x}), & x>\frac{2}{\pi}\end{cases}$$

5. Estudiad la continuidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{1+x^2}, & x<-1\\ x+1, & -1\le x<1\\ \dfrac{x^3}{1+x^4}, & 1\le x\le 2\\ \dfrac{32x-64}{5x^2-20}, & x>2\end{cases}$$

Estudiad el límite de la función en $+\infty$ y $-\infty$.

6. Lo mismo que el ejercicio anterior con la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{x}, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ \sqrt[5]{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

7. Estudiad la continuidad y los límites en $+\infty$ y $-\infty$ de las siguientes funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

   (a) $f(x) = \dfrac{|x|}{1 + |x|}$.

   (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

8. Hallad el valor que se debe asignar a $f(2)$, si fuera posible, para que la función sea continua en $x = 2$:

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$, $x \neq 2$.

   (b) $f(x) = \begin{cases} 2x + 5, & x > 2 \\ 15 - x^2, & x < 2 \end{cases}$.

9. Se considera la función $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ deinida por

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right).$$

   Estudiad los límites en $x = 1, -\infty, +\infty$ y la continuidad de la función.

10. Demostrad que la ecuación dada tiene al menor una raíz en el intervalo correspondiente:

   (a) $\sqrt[3]{x} = x^2 + 2x - 1$, en $[0, 1]$.

(b) $\cos(x) - \mathrm{sen}(x) = x$, en $[0, \frac{\pi}{2}]$.
(c) $\ln(x) + \sqrt{x} = 0$, en $(0, \infty)$.

11. Demostrad que la ecuación $\mathrm{tg}(x) - x = 0$ tiene infinitas soluciones.

12. Demostrad que la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

es continua. Asimismo, probad que es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$ y estrictamente creciente en $(0, \infty)$. Hallad la imagen de f.

13. Demostrad que la función $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\right)$$

es biyectiva. Hallad la función inversa f^{-1} y comprobad que es una función continua.

14. Demostrad que para cada $x > 0$, existe un único $y > 0$ tal que $y + \ln(y) = x$.

15. Un corredor recorre 6 kilómetros en 30 minutos. Demostrad que existe un intervalo de 5 minutos seguidos a lo largo del cual el corredor recorre exactamente un kilómetro.

16. Un escalador comienza, desde su campamento base, a subir una montaña el sábado a las 7 h., alcanzando la cima a las 8 de la tarde. A las 7h. del domingo inicia el descenso hacia el campamento tardando el mismo tiempo que hizo en la subida. Demostrad que existe una determinada hora en el descenso en la que el escalador se encuentra exactamente a la misma altura que a esa misma hora el día anterior.

