Sucesiones y series de números reales

1 Sucesiones

Ejercicio 1. Prueba que si $|x| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1}{1-x}$.

Ejercicio 2. Demuestra que la sucesión $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$, $\forall n \geq 1$ es convergente y calcular su límite.

E **Ejercicio 3.** Se considera la sucesión definida por recurrencia por $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$ para $n \in \mathbb{N}$. Estudia si es convergente y, en caso de que lo sea, calcula el límite.

E **Ejercicio 4.** Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por recurrencia como $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{4}{25}$.

a) Demuestra que $\frac{1}{5} < x_n < \frac{4}{5}$ para cualquier natural n.

b) Demuestra que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente.

c) Calcula su límite.

Ejercicio 5. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Estudiar el comportamiento de la sucesión $x_1 = a$, $x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2+a}{2}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2 Convergencia de series numéricas

Ejercicio 6. Aplicar el criterio de la raíz para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$

b) $\sum \left(\frac{n}{3n-2}\right)^{2n-1}$

c) $\sum \frac{n^n}{(2n+1)^n}$

d) $\sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$

Ejercicio 7. Aplicar el criterio del cociente para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{1}{n2^n}$

b) $\sum \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

c) $\sum \frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdots(4n-3)}$

d) $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$

Ejercicio 8. Aplicar el criterio de comparación para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{\log(n)}{n}$

b) $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

c) $\sum \frac{1}{2n-1}$

d) $\sum \frac{1}{2^n-n}$

e) $\sum \frac{1}{(2n-1)2n}$

f) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$

Ejercicio 9. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum \frac{2^n}{n}$

b) $\sum \frac{n+1}{2n+1}$

c) $\sum \frac{1}{n^2 \log(n)}$

d) $\sum \frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}$

Ejercicio 10. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum \frac{1}{n!}$

b) $\sum \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

c) $\sum \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$

d) $\sum \frac{n^2}{4^{(n-1)}}$

Ejercicio 11. Estudiar la convergencia de las series

a) $\sum \frac{n^3}{e^n}$

b) $\sum \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

c) $\sum \frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}$

d) $\sum \left(\frac{n+1}{n^2}\right)^n$

E **Ejercicio 12.** Estudia el carácter de las siguientes series:

a) $\sum \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}$.

b) $\sum \frac{1+\log(n)}{n^n}$.

E **Ejercicio 13.** Estudiar, según los valores de $a > 0$ la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{a^n}{n^a}$

b) $\sum a^n n^a$

3 Suma de series

Ejercicio 14. Suma, si es posible, las siguientes series

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(n+1)}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$

Ejercicio 15. Suma, si es posible, las siguientes series

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15}{10^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+3}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n}$