RELACIÓN DE PROBLEMAS 4

- Distribuciones multidimensionales.

1. El 60 % de los clientes de un almacén paga con dinero, el 30 % con tarjeta y el 10 % con cheques. Calcular la probabilidad de que de 10 clientes, 5 paguen con dinero, 2 con tarjeta y 3 con cheques.

2. En una urna que contiene los números -1, 0 y 1 en iguales proporciones, se efectúa un muestreo con reemplazamiento de tamaño 9. Calcular la probabilidad de que la suma de los números obtenidos sea cero.

3. En un hotel hay tres salas de televisión. En un determinado instante, cada televisor puede sintonizar 6 canales distintos, A, B,C,D,E y F. Cada canal tiene probabilidad $1/36, 3/36, 5/36, 7/36, 9/36$ y $11/36$, respectivamente, de ser sintonizado, con independencia unas televisiones de otras. Calcular

   a) Probabilidad de que en un instante dado se sintonicen los canales B,D y E.

   b) Probabilidad de que en un instante dado haya un televisor sintonizando el canal B y otro el E.

   c) Probabilidad de que en un instante dado los tres televisores sintonicen el canal F.

   d) Probabilidad de que en un instante dado no estén sintonizados los canales A, B, C y D.

4. Un ordenador genera números aleatorios del 0 al 9 con independencia e igual probabilidad para cada dígito. Si se generan 12 números aleatorios, calcular

   a) La probabilidad de que aparezca 6 veces el dígito 0, 4 veces el 1 y 2 veces el 2.

   b) El número esperado de veces que aparece el 0.

   c) La probabilidad de que aparezca 4 veces el 1 y 3 veces el 6.

5. Supóngase que F es una función de distribución continua en la recta real y sean α_1 y α_2 números reales tales que $F(\alpha_1) = 0{,}3$ y $F(\alpha_2) = 0{,}8$. Si se seleccionan al azar 25 observaciones independientes de la distribución cuya función de distribución es F. ¿Cuál es la probabilidad de que seis de los valores observados sean menores que α_1, diez de los valores observados estén entre α_1 y α_2 y 9 sean mayores que α_2?

6. Si se lanzan 5 dados equilibrados de forma independiente, ¿cuál es la probabilidad de que el número 1 y el 4 aparezcan el mismo número de veces?

7. Supóngase que el 16 % de los estudiantes de cierta escuela son de primer grado, el 14 % de segundo grado, el 38 % de penúltimo grado y el 32 % de último grado. Si se selecciona al azar 15 estudiantes del colegio, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 8 estudiantes sean de primero o segundo grado?

8. En un determinado juego de azar existen tres posibles resultados A, B y C, que se dan con probabilidad 0.8, 0.15 y 0.05, respectivamente. Una persona realiza 5 veces el juego de forma independiente, calcular la probabilidad de que no obtenga ninguna vez el resultado C ni más de una vez el resultado B.

9. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad

$$f(x, y) = \frac{1}{2}[f^*(x, y) + f^{**}(x, y)]$$

siendo $f^*(x, y)$ la función de densidad de una normal bidimensional con medias cero, varianzas 1 y coeficiente de correlación ρ y $f^{**}(x, y)$ la función de densidad de una normal bidimensional con medias cero, varianzas 1 y coeficiente de correlación $-\rho$. Probar que X e Y son normales, incorreladas, pero no independientes.

10. En cada uno de los siguientes casos, encontrar el vector de medias y la matriz de covarianzas de las densidades normales

    a) $f(x, y) = \frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}[(x-1)^2 + (y-2)^2]\right\}$

    b) $f(x, y) = \frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13)\right\}$

    c) $f(x, y) = \frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}(2x^2 + y^2 + +2xy - 22x - 14y + 65)\right\}$

11. Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución normal bivariante con parámetros $\mu_1 = 5, \mu_2 = 8, \sigma_1^2 = 16, \sigma_2^2 = 9, \rho = 0{,}6$. Calcular $\mathrm{P}[5 < Y < 11|X = 2]$.

12. Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución normal bidimensional con las siguientes características:

    - La mediana de X es 1.
    - $\mathrm{Var}X = \mathrm{Var}Y$
    - El coeficiente de correlación de X e Y vale 0.5.
    - El error cuadrático medio asociado a las curvas de regresión vale 1.
    - $\mathrm{P}[X \leq -1|Y = 1] = 0{,}0668$

    Determinar $\mathrm{E}X$, $\mathrm{E}Y$, la varianza común y dar la expresión de la función de densidad de (X, Y).

13. Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución normal bivariante de parámetros $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho$. Calcular la distribución de $X + Y$.

14. Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución normal bivariante y sea

$$W = X\cos\theta + Y\mathrm{sen}\theta$$

$$Z = X\cos\theta - Y\mathrm{sen}\theta$$

siendo $\theta \neq k\frac{\pi}{2}$. Obtener la distribución del vector aleatorio (W, Z). Dar una condición sobre θ para que W y Z sean independientes.

15. Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución normal bivariante, encontrar una condición necesaria y suficiente para que $X + Y$ y $X - Y$ sean independientes.