RELACIÓN DE PROBLEMAS 2

- Características de Vectores Aleatorios.

1. Sea (X,Y) un vector aleatorio con función de densidad
$$f(x,y) = 2, \qquad 0 < x < y < 1.$$
Calcular la función generatriz de momentos del vector (X,Y), las funciones generatrices de momentos marginales, vector de medias y matriz de covarianzas del vector (X,Y) (directamente y a partir de las correspondientes funciones generatrices de momentos.) Calcular $E[X/Y]$, $E[Y/X]$, $\mathrm{Var}(X/Y)$, $\mathrm{Var}(Y/X)$, , $E[\mathrm{Var}(X/Y)]$ y $E[\mathrm{Var}(Y/X)]$.

2. Sea (X,Y) un vector aleatorio con función de densidad
$$f(x,y) = \frac{1}{2}, \qquad (x,y) \in C$$
siendo C el cuadrado de vértices $(1,0),(0,1),(-1,0)$ y $(0,-1)$. Calcular el vector de medias, matriz de covarianzas y la función generatriz de momentos del vector (X,Y). Calcular $E[X/Y]$, $E[Y/X]$, $\mathrm{Var}(X/Y)$, $\mathrm{Var}(Y/X)$, , $E[\mathrm{Var}(X/Y)]$ y $E[\mathrm{Var}(Y/X)]$.

3. Sea (X,Y) un vector aleatorio con función masa de probabilidad

x \ y	-1	0	3
1	1/2	1/8	0
3	0	1/8	1/4

Calcular la función generatriz de momentos del vector (X,Y), las funciones generatrices de momentos marginales, vector de medias y matriz de covarianzas del vector (X,Y) (directamente y a partir de las correspondientes funciones generatrices de momentos.) Calcular $E[X/Y]$, $E[Y/X]$, $\mathrm{Var}(X/Y)$, $\mathrm{Var}(Y/X)$, , $E[\mathrm{Var}(X/Y)]$ y $E[\mathrm{Var}(Y/X)]$.

4. Se elige una palabra al azar de la siguiente frase: "IT IS TOO GOOD TO BE TRUE". Sea L la longitud de la palabra seleccionada y X el número de "O". Calcular el vector de medias, matriz de covarianzas y la función generatriz de momentos del vector (X,L). Calcular $E[X/L]$, $E[L/X]$, $\mathrm{Var}(X/L)$, $\mathrm{Var}(L/X)$, , $E[\mathrm{Var}(X/L)]$ y $E[\mathrm{Var}(L/X)]$.

5. Se selecciona un punto al azar (X,Y) en el cuadrado unidad. Calcular el valor esperado de $X^2 + Y^2$ (notemos que dicho valor representa el cuadrado de la distancia del punto al origen).

6. Se considera un rectángulo con lados de longitudes X e Y siendo X e Y variables aleatorias independientes con distribuciones $U(0,1)$ y $U(2,4)$, respectivamente. Calcular el valor esperado del área del rectángulo.

7. Sea (X,Y) un vector aleatorio con función de densidad
$$f(x,y) = k\, e^{-x-y}, \qquad 0 \le x \le y < \infty$$

- Calcular k para que sea función de densidad.
- Obtener la función generatriz de momentos de (X,Y) y, a partir de ella, $\mathrm{cov}(X,Y)$.

8. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes con distribuciones $\mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$ y $\mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$. Obtener la distribución de la variable $Y = X_1 - 2X_2$ a partir del cálculo de su función generatriz de momentos.

9. Si X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes con distribución $B(n_i, 1/2),\ i = 1,2$, deducir la distribución de $X_1 - X_2 + n_2$ a partir del cálculo de su función generatriz de momentos.

10. En un estudio llevado a cabo en un pais se ha deducido que el vector aleatorio (X,Y), con X la proporción de llamadas urbanas e Y la proporción de llamada interurbanas en un mes, tienen la siguiente función de densidad

$$f(x,y) = kx, \quad x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1$$

- Calcular k para que $f(x,y)$ sea función de densidad.
- Calcular la covarianza de X e Y y estudiar la independencia entre ambas variables.
- Si una familia no ha realizado llamadas interubanas, calcular la media y varianza de la proporción de llamadas urbanas de dicha familia.
- Si una familia ha realizado llamadas un 25 % de llamadas urbanas, calcular la media y varianza de la proporción de llamadas interurbanas de dicha familia.

11. Sean U y V variables aleatorias con función de densidad conjunta

$$f(u,v) = \mathrm{e}^{-u-v} \qquad u,v > 0$$

y sean $X = U+V,\ Y = U-V$. Probar que X e Y tienen covarianza cero pero no son independientes

12. Se lanzan dos monedas numeradas cada una con las caras 1 y 2. Sea X la suma obtenida e Y el máximo de los dos números. Calcular la función generatriz de momentos del vector (X,Y), las funciones generatrices de momentos marginales, vector de medias y matriz de covarianzas del vector (X,Y) (directamente y a partir de las correspondientes funciones generatrices de momentos.) Calcular $E[X/Y]$, $E[Y/X]$, $\mathrm{Var}(X/Y)$, $\mathrm{Var}(Y/X)$, , $E[\mathrm{Var}(X/Y)]$ y $E[\mathrm{Var}(Y/X)]$.