RELACIÓN DE PROBLEMAS 1

- Vectores Aleatorios.

1. Estudiar si la siguiente función es función de distribución de un vector aleatorio bidimensional:

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 & x+2y \geq 1 \\ \\ 0 & x+2y < 1 \end{cases}$$

2. Asociadas al experimento aleatorio de lanzar un dado y una moneda no cargados, se define la variable X como el valor del dado y la variable Y, que toma el valor 0 si sale cara en la moneda, y 1 si sale cruz. Calcular la función masa de probabilidad y la función de distribución del vector aleatorio (X, Y). Calcular las funciones masa de probabilidad marginales y condicionadas. Calcular las funciones de distribución marginales y condicionadas.

3. Sea T el triángulo de vértices $(0,0), (0,\sqrt{2})$ y $(\sqrt{2},\sqrt{2})$. Para cada punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se define $F(x,y)$ como el área de la intersección de T con la región $\{(x_1,y_1) : x_1 \leq x,\ y_1 \leq y\}$. Probar que F define una función de distribución sobre $\mathbb{R}^2$. Dar su expresión explícita y calcular la función de densidad asociada. Calcular las funciones de densidad marginales y condicionadas. Calcular las funciones de distribución marginales y condicionadas

4. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad

$$f(x,y) = k, \qquad (x,y) \in T$$

siendo T el triángulo de vértices $(1,0), (0,1)$ y $(-1,0)$. Calcular

- el valor de k
- $P[X \leq 1/2, Y \leq 1/2]$
- $P[X \leq 1/3]$
- la función de distribución del vector (X, Y)
- distribuciones marginales y condicionadas

5. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad

$$f(x,y) = \frac{k}{\sqrt{xy}}, \qquad (x,y) \in \triangle$$

siendo $\triangle$ el triángulo de vértices $(0,0), (0,1)$ y $(1,1)$. Determinar

- la constante k
- $P[X + Y \leq 1/2]$
- la función de distribución del vector (X, Y)
- distribuciones marginales y condicionadas

6. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad

$$f(x,y) = \frac{3}{4}\left[xy + \frac{x^2}{2}\right], \qquad 0 < x < 1,\ 0 < y < 2.$$

Calcular $P\{Y < 1/X < \frac{1}{2}\}$ y $P\{Y < 1/X = \frac{1}{2}\}$.

7. En una urna con 10 bolas negras, 15 rojas y 25 blancas se extraen 10 bolas sin reemplazamiento. Sean X_1 y X_2 el número de bolas rojas y negras, respectivamente, en las 10 extraidas. Calcular:

   a) Distribución conjunta de (X_1, X_2).

   b) Distribuciones marginales y condicionadas.

8. Sea $X = (X_1, X_2)$ un vector aleatorio con función masa de probabilidad

$$P\{X = (x_1, x_2)\} = \frac{k}{2^{x_1+x_2}}, \qquad x_1, x_2 : 1, 2, 3\ldots$$

   - Calcular el valor de k.
   - Distribuciones marginales y condicionadas.
   - Función masa de probabilidad del vector Y de componentes $Y_1 = X_1 + X_2$ e $Y_2 = X_1 - X_2$.
   - Función masa de probabilidad del vector Y de componentes $Y_1 = X_1 + X_2$ e $Y_2 = |X_1 - X_2|$.

9. Sea (X_1, X_2) un vector aleatorio con función de densidad

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi}, \qquad x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$

Calcular las distribuciones marginales y condicionadas.

10. La renta, X, y el consumo, Y, de los habitantes de una población, tienen por funciones de densidad

$$f_X(x) = 2 - 2x, \quad 0 < x < 1$$

$$f(y/x) = \frac{1}{x}, \quad 0 < y < x$$

Determinar la función de densidad conjunta del vector aleatorio (X, Y) y la probabilidad de que el consumo sea inferior a la mitad de la renta.

11. El número de automóviles utilitarios, X, y el de automóviles de lujo, Y, que poseen las familias de una población se distribuye de acuerdo a la siguiente función masa de probabilidad:

X \ Y	0	1	2
0	1/3	1/12	1/24
1	1/6	1/24	1/48
2	5/22	5/88	5/176

Calcular la función de distribución del vector (X, Y) en los puntos $(0,0), (0,2), (1,1)$ y $(2,1)$, y la probabilidad de que una familia tenga tres o más automóviles.

12. Una gasolinera tiene Y miles de litros en su depósito de gasóleo al comienzo de cada semana. A lo largo de una semana se venden X miles de litros del citado combustible. Si la función de densidad conjunta de (X, Y) es

$$f(x, y) = \frac{1}{8}, \quad 0 < x < y < 4$$

se pide:

- Probar que $f(x, y)$ es función de densidad y obtener la función de distribución.
- Probabilidad de que en una semana se venda más de la tercera parte de los litros de que se dispone al comienzo de la misma.
- Si en una semana se han vendido 3.000 litros de gasóleo, ¿cuál es la probabilidad de que al comienzo de la semana hubiese entre 3.500 y 3.750 litros de combustible?

13. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad

$$f(x, y) = e^{-x-y}, \qquad x, y > 0$$

Encontrar las densidades de las siguientes variables: $X+Y$, $X-Y$, $\frac{X}{Y}$, min (X, Y), max (X, Y), $\frac{\min(X, Y)}{\max(X, Y)}$.

14. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad constante en el cuadrado de lados $[0, 1]$. Encontrar las densidades de las siguientes variables: $X + Y$, $X - Y$, XY, $\frac{X}{Y}$, min (X, Y), max (X, Y), $\frac{\min(X, Y)}{\max(X, Y)}$.

15. Sea (X_1, X_2) un vector aleatorio con función masa de probabilidad

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2\} = \frac{e^{-2\lambda}\lambda^{x_1+x_2}}{x_1!x_2!}, \qquad x_1, x_2 : 0, 1, 2 \ldots \qquad (\lambda > 0)$$

Sea $M = \max(X_1, X_2)$ y $N = \min(X_1, X_2)$. Calcular las distribuciones de las variables M y N y la distribución conjunta del vector (M, N).

16. Sea (X_1, X_2) un vector aleatorio con función de densidad

$$f(x_1, x_2) = \lambda\mu e^{-\lambda x_1 - \mu x_2}, \qquad x_1, x_2 > 0 \quad (\lambda, \mu > 0)$$

Sea $Y_1 = \min(X_1, X_2)$ e $Y_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } X_1 < X_2 \\ 0 & \text{si } X_1 > X_2 \end{cases}$

Calcular la distribución del vector aleatorio (Y_1, Y_2) y las marginales.

17. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad

$$f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, \qquad x, y > 0 \quad (\lambda > 0)$$

Encontrar las densidades de X^3, $3 + 2X$, $X - Y$, $|X - Y|$, min (X, Y^3), max (X, Y^3).

18. La función de densidad del vector aleatorio (X, Y), donde X denota el número de kilogramos de naranjas, e Y el número de kilogramos de manzanas vendidos al día en una frutería está dada por
$$f(x,y) = \frac{1}{400}, \quad 0 < x < 20,\ 0 < y < 20$$
Determinar la función de distribución de (X, Y) y la probabilidad de que en un día se vendan, entre naranjas y manzanas, menos de 20 kilogramos.

19. Sea (X_1, X_2, X_3) un vector aleatorio con función masa de probabilidad
$$P\{(X_1, X_2, X_3) = (x_1, x_2, x_3)\} = 1/4 \qquad (x_1, x_2, x_3) \in \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\}$$
    - ¿Son X_1, X_2 y X_3 independientes?
    - ¿Son independientes dos a dos?
    - ¿Son $X_1 + X_2$ y X_3 independientes?

20. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad
    - $f(x,y) = 1/2 \quad (x,y) \in C$ siendo C el cuadrado de vértices $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$.
    - $f(x,y) = 1 \quad (x,y) \in C$ siendo C el cuadrado de vértices $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$.

    Estudiar, en cada caso, si las variables X e Y son independientes.

21. Sea (X, Y, Z) un vector aleatorio con función masa de probabilidad
$$P\{X = x, Y = y, Z = z\} = \begin{cases} 3/16 & (x,y,z) \in \{(0,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)\} \\ \\ 1/16 & (x,y,z) \in \{(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,1,1)\} \end{cases}$$
Probar que X es independiente de Y y de Z, pero no es independiente del par (Y, Z).

22. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad
$$f(x,y) = \frac{1}{4}\left[1 + xy(x^2 - y^2)\right], \quad |x| < 1,\ |y| < 1.$$
¿Son independientes las variables X e Y?

23. El número de automóviles utilitarios, X, y el de automóviles de lujo, Y, que poseen las familias de una población se distribuye de acuerdo a la siguiente función masa de probabilidad:

X \ Y	0	1	2
0	1/3	1/12	1/24
1	1/6	1/24	1/48
2	5/22	5/88	5/176

Comprobar que las variables X e Y son independientes.