Demostración de que la expresión dada para la normal es una función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\ \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < \infty$$

Para que sea función de densidad debe verificar:

1. $f(x) \geq 0$, lo cual se deduce de la propia definición.

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. En efecto, llamando I a la integral anterior y haciendo el cambio de variable

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}, \quad dz = \frac{dx}{\sigma}$$

se tiene

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\ I_1.$$

Calculemos el valor de I_1. Para ello, tengamos en cuenta lo siguiente:

$$I_1\ I_1 = I_1^2 = \int_0^{+\infty} e^{-y^2/2} dy \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} dxdy = (*)$$

realizando un cambio a polares

$$\begin{array}{ll} x = r\cos\theta & dx = \cos\theta dr - r sen\theta d\theta \\ y = r sen\theta & dy = sen\theta dr + r\cos\theta d\theta \end{array} \qquad \begin{array}{c} x^2 + y^2 = r^2 \\ |J| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r sen\theta \\ sen\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \end{array}$$

resulta

$$(*) = \int_0^{\pi/2} \int_0^{+\infty} r\ e^{-r^2/2} dr\ d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{+\infty} r\ e^{-r^2/2} dr =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[-e^{-r^2/2}\right]_0^{+\infty} d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta = [\theta]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

Por tanto, $I_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$, de donde, finalmente, se tiene que la integral buscada, $I = 1$.