M. Jesús García-Ligero
Patricia Román Román

Tema 8: Programación No Lineal

1 1.- Introducción

El estudio realizado hasta el momento se ha dedicado a problemas de programación lineal, que modelizaban situaciones donde el objetivo y las restricciones son lineales en las variables de decisión. Aunque los problemas de programación lineal son muy comunes y cubren un amplio rango de aplicaciones, en la vida real uno se tiene que enfrentar con cierta frecuencia a otro tipo de problemas que no son lineales. Cuando el conjunto de restricciones, la función objetivo, o ambos, son no lineales, se dice que se trata de un problema de programación no lineal (PPNL).

Los problemas de optimización no lineal son más difíciles de resolver que los lineales. Estas dificultades aparecen incluso en el caso más simple como el de optimizar una función de una variable en R sin restricciones.

En este tema se presentan algunos problemas de programación no lineal. En algunos casos, coinciden con los que se han descrito en temas precedentes, pero bajo hipótesis distintas.

2 Ejemplos de programación no lineal

- Ejemplo 1: Un joven ingeniero de una compañía ha sintetizado un nuevo fertilizante hecho a partir de dos materias primas. Al combinar cantidades de las materias primas básicas x_1 y x_2, la cantidad de fertilizante que se obtiene viene dada por $Q = 4x_1 + 2x_2 - 0.5x_1^2 - 0.25x_2^2$. Se requieren 480 euros por unidad de materia prima 1 y 300 euros por cada unidad de materia prima 2 que se empleen en la fabricación del fertilizante (en estas cantidades se incluyen los costos de las materias primas y los costos de producción). Si la compañía dispone de 24000 euros para la producción de materias primas, plantear el problema para determinar la cantidad de materia prima de forma que se maximice la cantidad de fertilizante.

  Las variables de decisión del problema son:

  $$\begin{array}{l} x_1 : \text{cantidad de materia prima 1} \\ x_2 : \text{cantidad de materia prima 2} \end{array}$$

  El objetivo es maximizar la cantidad de fertilizante, $Q(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2 - 0.5x_1^2 - 0.25x_2^2$

  Restricciones del problema:

  - El coste no puede exceder el presupuesto que la empresa tiene asignado para el fertilizante, $480x_1 + 300x_2 \leq 24000$
  - No negatividad de las cantidades: $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ Por tanto

  $$\begin{array}{ll} Max\ Q(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2 - 0.5x_1^2 - 0.25x_2^2 \\ s.a. \qquad 480x_1 + 300x_2 \leq 24000 \\ \qquad\qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

- Ejemplo 2: Una empresa produce frigoríficos y ha firmado un contrato para suministrar al menos 150 unidades en tres meses, 50 unidades al final del primer mes, 50 al final del segundo y 50 al final del tercero. El coste de producir una cantidad de frigoríficos en cualquier mes es su cuadrado. La empresa puede producir si lo desea más frigoríficos de los que necesita en cualquier mes y guardarlos para el siguiente, siendo el coste de almacenaje de 12 euros por unidad al mes. Suponiendo que no hay inventario inicial, formular el programa adecuado para determinar el número de frigoríficos que deben producirse cada mes, para minimizar el coste total.

  Las variables de decisión del problema son:

  $$\begin{array}{l} x_1 : \text{número de frigoríficos a producir en el primer mes} \\ x_2 : \text{número de frigoríficos a producir en el segundo mes} \\ x_3 : \text{número de frigoríficos a producir en el tercer mes} \end{array}$$

  El objetivo es minimizar los costos, Costo total= Costo de producción + Costo de almacenaje del segundo mes + Costo de almacenaje del tercer mes

  $$\begin{array}{l} \text{Costo de producción} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ \text{Costo de almacenaje del segundo mes} = 12(x_1 - 50) \\ \text{Costo de almacenaje del tercer mes} = 12(x_1 + x_2 - 50) \end{array}$$

  Por tanto, $Z(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 12(x_1 - 50) + 12(x_1 + x_2 - 50)$

  Restricciones del problema:

  - Atender la demanda al final del primer mes, $x_1 \geq 50$
  - Atender la demanda al final del segundo mes, $x_1 - 50 + x_2 \geq 50$
  - Atender la demanda al final del tercer mes, $x_1 + x_2 - 100 + x_3 \geq 50$
  - No negatividad de las cantidades: $x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$ Por tanto

  $$\begin{array}{ll} Min\ Z(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 12(x_1 - 50) + 12(x_1 + x_2 - 50) & \\ s.a. \qquad x_1 \geq 50 & \\ \qquad\quad x_1 - 50 + x_2 \geq 50 & \\ \qquad\quad x_1 + x_2 - 100 + x_3 \geq 50 & \\ \qquad\quad x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 & \end{array}$$

3 Formulación de un Problema de Programación No Lineal (P.P.N.L.)

Un *problema no lineal* es un problema de programación matemática donde la función objetivo o alguna restricción es no lineal.

Forma general de un P.P.N. L.

$$\begin{array}{l} Max(Min)\ f(x_1, , x_2, \ldots, x_n) \\ s.a.\ g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)(\leq, =, \geq)b_1 \\ \qquad g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)(\leq, =, \geq)b_2 \\ \qquad g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)(\leq, =, \geq)b_m \end{array}$$

Como en Programación lineal la función $f(x_1, , x_2, \ldots, x_n)$ es la **función objetivo** del P.N.L. y $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)(\leq, =, \geq)b_i, \ i = 1, \ldots, m$ son las restricciones del mismo. Además se supone que estas funciones son diferenciables.

Notar que las características y propiedades de los P.N.L. son distintas a las de P.L. y los algoritmos de optimización son también diferentes a los utilizados en P.L.

Tipos de Problemas de Programación No lineal

- Sin restricciones: Estos problemas son un programa matemático para los que las variables de decisión no están restringidas. Su formulación es de la siguiente forma:

$$Max \ (Min) \ f(x_1, , x_2, \ldots, x_n)$$

Este tipo de problemas aparecen de forma natural en distintas áreas de la ciencia tales como Estadística y Econometría. Otro aspecto importante de este tipo es que, en ocasiones, un P.N.L. con restricciones se puede resolver a partir de un sin restricciones.

Ejemplo: Se poseen los siguientes datos sobre una población animal, y_i a lo largo de cinco años. Se quiere ajustar a un modelo $y = ae^{bt}$

t_i	1	2	4	5	8
y_i	4	4	6	11	22

La función a optimizar es $F(a, b) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{5} (ae^{bt_i} - y_i)^2$. En este caso sería

$$Min_{a,b} \ F(a, b).$$

Notemos que el método de mínimos cuadrados responde a una formulación no lineal sin restricciones; esto es, La función $y = ax + b$ se ajusta a los datos $(x_i, y_i), \ i = 1, \ldots, n$ minimizando la expresión

$$Min_{a,b} \ S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a + bx_i))^2$$

- Con restricciones: La formulación de este tipo de problemas responde a la formulación general presentada al comienzo de esta sección. El estudio del problema con restricciones comenzó abordando solamente el problema con restricciones de igualdad, teniendo sus orígenes en el siglo XVIII. El problema con restricciones de desigualdad tiene una historia más reciente, de hecho hasta los años cincuenta del pasado siglo no se tratan éstos.

  Notemos que los problemas con restricciones de desigualdad permiten reflejar la realidad en términos matemáticos mejor que los problemas con restricciones de igualdad, ya que no "limitan" tanto la elección de los valores de las variables de decisión.

  Los problemas con restricciones de igualdad suelen considerarse como poco realistas debido a lo restrictivo de su planteamiento. Sin embargo, el estudio de ellos se considera interesante ya que es de utilidad en distintas áreas de conocimiento como Economía, Estadística...

Ejemplo: Una compañía planea gastar 10000 euros en publicidad. Se sabe que un minuto de publicidad en televisión cuesta 3000 euros y 1000 euros en la radio. Si la empresa compra x minutos de publicidad en televisión e y minutos en la radio, su ingreso, en euros, está dado por $-2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y$. ¿Cómo puede la empresa maximizar sus ingresos?

Las variables de decisión del problema son:

$$\begin{aligned} &x : \text{minutos que compra la empresa en televisión} \\ &y : \text{minutos que compra la empresa en radio} \end{aligned}$$

El objetivo es maximizar los ingresos, $Z(x, y) = -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y$

Restricciones del problema:

- Gastar 10000 euros en publicidad en los dos medios, $3000x + 1000y = 10000$. Por tanto

$$\begin{array}{ll} Ma\ Z(x,y) = -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y \\ s.a. \qquad\qquad 3000x + 1000y = 10000 \end{array}$$

Este problema es un problema no lineal con restricciones de igualdad (lineal).

Ejemplo: Una compañía petrolífera debe determinar cuántos barriles de petróleo hay que extraer en los próximos dos años. Si la compañía extrae x_1 millones de barriles durante un año, se pondrá vender cada barril a 30-x_1 euros. Si extrae x_2 millones de barril durante el segundo año, se podrá vender cada barril a 35-x_2 euros. El costo para extraer x_1 millones de barriles en el primer año es de x_1^2 millones de euros y el costo para extraer x_2 millones de barriles durante el segundo año es de $2x_2^2$ millones de euros. Se puede obtener como máximo un total de 20 millones de barriles de petróleo, y se puede gastar como máximo 250 millones de euros en la extracción. Formular el P.N.L. para ayudar a la empresa a maximizar sus ganancias para los próximos dos años.

Las variables de decisión del problema son:

$$\begin{aligned} &x_1 : \text{millones de barriles extraídos durante el primer año} \\ &x_2 : \text{millones de barriles extraídos durante el segundo año} \end{aligned}$$

El objetivo es maximizar los ingresos, $Z(x, y) = x_1(30 - x_1) + x_2(35 - x_2) - x_1^2 - 2x_2^2$

Restricciones del problema:

- Gastar como máximo 250 euros en la extracción, $x_1^2 + x_2^2 \leq 250$.
- Obtener como máximo 20 millones de barriles de petróleo, $x_1 + x_2 \leq 20$. Por tanto

$$\begin{array}{ll} Ma\ Z(x,y) = x_1(30 - x_1) + x_2(35 - x_2) - x_1^2 - 2x_2^2 \\ s.a. \qquad\qquad x_1^2 + x_2^2 \leq 250 \\ \qquad\qquad\quad\ x_1 + x_2 \leq 20 \\ \qquad\qquad\quad\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Este problema es un problema no lineal con restricciones de desigualdad (no lineal y lineal).