Relación de problemas

Tema 5. Variables aleatorias: distribuciones de probabilidad y características

Primer curso de Grado en Ingeniería Informática y en Matemáticas

---

1. Sea X una variable aleatoria con función masa de probabilidad $P(X = i) = ki; \quad i = 1, \ldots, 20.$

   a) Determinar el valor de k, la función de distribución y las siguientes probabilidades:

   $$P(X = 4),\ P(X < 4),\ P(3 \leq X \leq 10),\ P(3 < X \leq 10),\ P(3 < X < 10).$$

   b) Supongamos que un jugador gana 20 monedas si al observar esta variable obtiene un valor menor que 4, gana 24 monedas si obtiene el valor 4 y, en caso contrario, pierde una moneda. Calcular la ganancia esperada del jugador y decir si el juego le es favorable.

2. Sea X el número de bolas blancas obtenidas al sacar dos de una urna con 10 bolas de las que 8 son blancas. Calcular:

   a) Función masa de probabilidad y función de distribución.

   b) Media, mediana y moda, dando la interpretación de cada una de estas medidas.

   c) Intervalo intercuartílico, especificando su interpretación.

3. El número de lanzamientos de una moneda hasta salir cara es una variable aleatoria con distribución $P(X = x) = 2^{-x}; \quad x = 1, 2, \ldots$

   a) Probar que la función masa de probabilidad está bien definida.

   b) Calcular la probabilidad de que el número de lanzamientos necesarios para salir cara esté entre 4 y 10.

   c) Calcular los cuartiles y la moda de la distribución, interpretando los valores.

   d) Calcular la función generatriz de momentos y, a partir de ella, el número medio de lanzamientos necesarios para salir cara y la desviación típica.

4. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

   $$f(x) = \begin{cases} k_1(x+1) & 0 \leq x \leq 4 \\ \\ k_2 x^2 & 4 < x \leq 6 \end{cases}$$

   Sabiendo que $P(0 \leq X \leq 4) = 2/3$, determinar $k_1,\ k_2$, y deducir su función de distribución.

5. La dimensión en centímetros de los tornillos que salen de cierta fábrica es una variable aleatoria, X, con función de densidad

   $$f(x) = \frac{k}{x^2}, \quad 1 \leq x \leq 10.$$

   a) Determinar el valor de k, y obtener la función de distribución.

   b) Hallar la probabilidad de que la dimensión de un tornillo esté entre 2 y 5 cm.

c) Determinar la dimensión máxima del 50 % de los tornillos con menor dimensión y la dimensión mínima del 5 % con mayor dimensión.

d) Si Y denota la dimensión de los tornillos producidos en otra fábrica, con la misma media y desviación típica que X, dar un intervalo en el que tome valores la variable Y con una probabilidad mínima de 0.99.

6. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{10} & 1 < x \leq 2 \\ & \\ 0.4 & 4 < x \leq 6. \end{cases}$$

a) Calcular $P(1.5 < X \leq 2)$, $P(2.5 < X \leq 3.5)$, $P(4.5 \leq X < 5.5)$, $P(1.2 < X \leq 5.2)$.

b) Dar la expresión general de los momentos no centrados y deducir el valor medio de X.

c) Calcular la función generatriz de momentos de X.

7. Sea X una variable aleatoria con función de distibución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ ax + b & 0 \leq x < 1 \\ kx^2 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

- Calcular los valores de a, b y k para que se satisfaga cada una de las siguientes condiciones:
  a) X es una variable de tipo continuo.
  b) X es una variable de tipo discreto.
  c) Los únicos valores que toma X con probabilidad positiva son el 1 y el 2, ambos con probabilidad 1/8.
- En el caso en que X es de tipo continuo, calcular su media y su función generatriz de momentos.
- En la situación c), calcular $E[X]$, $P\{X \in [0, 1]\}$ y $P\{X \in [1/2, 1)\}$

8. Con objeto de establecer un plan de producción, una empresa ha estimado que la demanda de sus clientes, en miles de unidades del producto, se comporta semanalmente con arreglo a una ley de probabilidad dada por la función de densidad:

$$f(x) = \frac{3}{4}(2x - x^2), \quad 0 \leq x \leq 2.$$

a) ¿Qué cantidad deberá tener dispuesta a la venta al comienzo de cada semana para poder satisfacer plenamente la demanda con probabilidad 0.5?

b) Pasado cierto tiempo, se observa que la demanda ha crecido, estimándose que en ese momento se distribuye según la función de densidad:

$$f(y) = \frac{3}{4}(4y - y^2 - 3), \quad 1 \leq y \leq 3.$$

Los empresarios sospechan que este crecimiento no ha afectado a la dispersión de la demanda, ¿es cierta esta sospecha?

9. Calcular las funciones masa de probabilidad de las variables $Y = X + 2$ y $Z = X^2$, siendo X una variable aleatoria con distribución:

$$P(X=-2) = \frac{1}{5}, \quad P(X=-1) = \frac{1}{10}, \quad P(X=0) = \frac{1}{5}, \quad P(X=1) = \frac{2}{5}, \quad P(X=2) = \frac{1}{10}.$$

¿Cómo afecta el cambio de X a Y en el coeficiente de variación?

10. Calcular las funciones de densidad de las variables $Y = 2X + 3$ y $Z = |X|$, siendo X una variable continua con función de densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{4}, \quad -2 < x < 2.$$

11. Si X es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

hallar su función de distribución y las probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

a) $\{|X| \leq 2\}$.
b) $\{|X| \leq 2 \quad \text{ó} \quad X \geq 0\}$.
c) $\{|X| \leq 2 \quad \text{y} \quad X \leq -1\}$.
d) $\{X^3 - X^2 - X - 2 \leq 0\}$.
e) $\{X \text{ es irracional}\}$.

12. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Encontrar la distribución de las variables:

a) $Y = \dfrac{X}{1+X}$.
b) $Z = \begin{cases} -1, & X < 3/4 \\ 0, & X = 3/4 \\ 1, & X > 3/4. \end{cases}$

13. Sea X una variable aleatoria simétrica con respecto al punto 2, y con coeficiente de variación 1. ¿Qué puede decirse acerca de las siguientes probabilidades?:

- $P(-8 < X < 12)$
- $P(-6 < X < 10)$.

14. Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 < x < 0 \\ \dfrac{x+1}{6} & 0 < x < 2 \end{cases}$$

- Calcular la función de densidad de la variable $Y = |X|$.
- Se toma una observación de la variable X. Si el valor observado está en el intervalo $[0, 1)$ se gana una moneda y si está en $[1, 2)$ se ganan 2 monedas; si está en $(-1, -1/2]$ se pierde una moneda y si está en $[-1/2, -1/4)$ se pierden dos monedas; en caso de no estar en ninguno de estos intervalos, no hay ni pérdida ni ganancia. Calcular la ganancia esperada en este juego y la distribución de probabilidad de la variable $Z^2 + 1$, donde Z representa la ganancia.

15. Sea X una v.a. de tipo continuo. Encontrar la distribución de cada una de las siguientes variables, definidas a partir de X:

    a) $Y = \begin{cases} -1 & X \leq 0 \\ 1 & X > 0 \end{cases}$

    b) $Z = \begin{cases} -b & X \leq -b \\ X & |X| < b \\ b & X \geq b \end{cases}$

    c) $T = \begin{cases} X & |X| \geq b \\ 0 & |X| < b \end{cases}$