Tema 3

Interpolación de funciones

3.1 Introducción a la teoría de interpolación

Interpolar una función f de un cierto espacio funcional $\mathcal{F}$ es encontrar una función p de un espacio funcional más "manejable" o con propiedades deseables $\mathcal{H}$ tal que f y p coincidan en un número finito de datos.

Un ejemplo de un problema de interpolación sería el siguiente:

Dada $f : \Omega \to \mathbb{R},\ \Omega \subset \mathbb{R}$ *y* $x_0, \ldots, x_n \in \Omega$, *hallar* $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ *tal que*

$$f(x) \simeq p(x), \forall x \in \Omega,$$

siendo

$$\mathbb{P}_n(\Omega) = \{\textit{polinomios de grado } \leq\ n \textit{ en } \Omega, \\ \textit{tal que } p(x_k) = f(x_k),\ \forall k = 0, \ldots, n.\}$$

Lo primero que debemos estudiar es la unisolvencia del problema, es decir, si tiene solución y, en tal caso, si ésta es única.

Por ser $p \in P_n(\Omega)$, se tiene que

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

y además, se debe verificar que

$$\forall k = 0, \ldots, n, \qquad p(x_k) = \sum_{i=0}^{n} a_i x_k^i = f(x_k).$$

Así pues, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales con incógnitas $a_0, a_1, \ldots, a_n$:

$$\begin{array}{rcl} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n & = & f(x_0), \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n & = & f(x_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n & = & f(x_n), \end{array}$$

cuya matriz de coeficientes tiene por determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & . & x_0^n \\ 1 & x_1 & . & x_1^n \\ \ldots & \ldots & . & \ldots \\ 1 & x_n & . & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{\substack{j<i \\ i=1}}^{n} (x_i - x_j).$$

Como $x_i \neq x_j$, para todo $i \neq j$, el anterior determinante, que es del tipo Vandermonde, es no nulo y, por lo tanto, el sistema tiene solución única, es decir, el problema es unisolvente.

Las soluciones de este sistema determinarán el polinomio que utilizaremos como aproximante de la función, al que llamaremos *polinomio de interpolación* de $f(x)$ para los datos $f(x_0)$, $f(x_1)$, …, $f(x_n)$.

A continuación se expresa la formulación general de un problema de interpolación:

Problema de Interpolación

Sea V un espacio vectorial real n-dimensional y $L_1, \ldots, L_n : V \to \mathbb{R}$, n aplicaciones lineales.

Dados $z_1, ..., z_n \in \mathbb{R}$, se considera el siguiente problema: :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{hallar } p \in V \text{ tal que} \\ L_i(p) = z_i, \quad \forall i = 1, \ldots, n. \end{array} \right. \tag{3.1.1}$$

Nota 3.1 En los casos más usuales sucede que:

a) $z_i = f(x_i)$ ó $z_i = f^{(k)}(x_i)$, siendo f un elemento de un espacio de funciones reales de variable real y $x_1, \ldots, x_n$, n valores del dominio de f;

b) V es un espacio real funcional con propiedades ”particulares”;

c) las aplicaciones lineales son de alguno de los tipos siguientes:

$$L_i(p) = p(x_i),$$
$$L_i(p) = p^{(k)}(x_i),$$

y se dicen de tipo lagrangiano en el primer caso y de tipo Hermite en el segundo.

□

El estudio de la unisolvencia del problema de interpolación viene determinado por el siguiente resultado.

Teorema 3.1 *Sea* $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ *una base de* V*. El problema de interpolación (3.1.1) tiene solución única si y sólo si* $det(L_i(p_j)) \neq 0$.

Demostración Si $p \in V$. Entonces, deben existir $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$p = \sum_{j=1}^{n} a_j p_j$$

Para todo $i = 1, \ldots, n$, se verifica que L_i lineal y, por tanto, se tiene que

$$L_i(\sum_{j=1}^{n} a_j p_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j L_i(p_j) = z_i,$$

de donde se deduce el sistema de ecuaciones lineales dado por

$$\sum_{j=1}^{n} a_j L_i(p_j) = z_i, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n,$$

que tiene solución única si y sólo si se cumple que

$$Det(L_i(p_j))_{i,j=1,\ldots,n} \neq 0$$

□

3.2 Algunos casos particulares

3.2.1 Interpolación polinomial clásica

Para una función f se considera el espacio vectorial de funciones $V = \mathbb{P}_n[x]$, cuya dimensión es $dim\, V = n+1$. Asimismo, se consideran los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, las aplicaciones lineales

$$L_k(p) = p(x_k), \quad \forall\, k = 0, \ldots, n,$$

y los datos

$$z_k = f(x_k), \quad \forall k = 0, \dots, n.$$

Para la base de $V = \mathbb{P}_n[x]$ dada por $p_k(x) = x^k$, para todo $k = 0, \dots, n$, se verifica que

$$Det(L_i(p_j))_{i,j=0,\dots,n} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{\substack{j<i \\ i=1}}^{n} (x_i - x_j) \neq 0,$$

de donde se deduce que este problema tiene solución única.

3.2.2 Interpolación de Taylor

Para una función real de variable real f y $x_0 \in \mathbb{R}$, se considera el espacio vectorial $V = \mathbb{P}_n[x]$, cuya dimensión es $\dim V = n + 1$, las aplicaciones lineales

$$L_k(p) = p^{(k)}(x_0), \quad \forall k = 0, \dots, n,$$

y los datos

$$z_k = f^{(k)}(x_0), \quad \forall k = 0, \dots, n.$$

Tomando, de nuevo, la base de $V = \mathbb{P}_n[x]$ dada por $p_k(x) = x^k$, para todo $k = 0, \dots, n$, se verifica que

$$Det(L_i(p_j))_{i,j=0,\dots,n} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 0 & 1 & 2x_0 & \dots & nx_0^{n-1} \\ 0 & 0 & 2 & \dots & n(n-1)x_0^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n! \end{vmatrix} = 1!2! \dots n! \neq 0.$$

Por tanto, este problema tiene solución única y el interpolante resultante es el polinomio de interpolación de Taylor de grado n centrado en x_0, es decir,

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_k)}{k!} x^k.$$

3.2.3 Interpolación de Hermite

Para una función derivable f en $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, se consideran

$$
\begin{array}{ll}
V = \mathbb{P}_{2n-1}[x], & dim\, V = 2n; \\
L_{2k-1}(p) = p(x_k), & \forall k = 1, \ldots, n; \\
L_{2k}(p) = p'(x_k), & \forall k = 1, \ldots, n; \\
z_{2k-1} = f(x_k), & \forall k = 1, \ldots, n; \\
z_{2k} = f'(x_k), & \forall k = 1, \ldots, n; \\
p_j = x^j, & \forall j = 0, 1, \ldots, 2n-1.
\end{array}
$$

Sea p la posible solución del problema para los datos $z_r = 0$, para $r = 1, \ldots, 2n$, entonces p es divisible por $(x - x_k)^2$, para $k = 1, ..., n$. Por tanto p es de grado $2n$ lo cual no es posible, pues $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$, salvo que sea $p = 0$.

Por tanto, el problema homogéneo tiene únicamente la solución nula y, en consecuencia, el problema general de interpolación de Hermite tiene solución única.

3.3 Fórmula de Lagrange para el problema de interpolación polinómica

Partimos del problema de interpolación polinómica clásico, es decir, consideramos dados

$$x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, \qquad z_0, \ldots, z_n \in \mathbb{R}, \qquad V = \mathbb{P}_n[x].$$

Tomemos como base de $\mathbb{P}_n[x]$ el conjunto de polinomios $\{l_1, \ldots, l_n\}$ tales que

$$l_k(x_j) = \delta_{kj}, \quad \forall k, j = 0, \ldots, n.$$

Es decir, para cualesquiera $i, k = 0, \ldots, n$, se tiene que $l_k(x_i) = 0$, si $i \neq k$, y $l_k(x_k) = 1$.

Luego, para $k = 0, \ldots, n$, l_k es un polinomio de grado n que se anula en n valores $x_0, \ldots, x_n$. Por tanto,

$$l_k(x) = a \prod_{i \neq k} (x - x_i).$$

Como se debe verificar que

$$l_k(x_k) = a \prod_{i \neq k} (x_k - x_i) = 1,$$

se tiene que

$$a = \frac{1}{\prod_{i\neq k}(x_k - x_i)},$$

y, por tanto,

$$l_k(x) = \frac{1}{\prod_{i\neq k}(x_k - x_i)} \prod_{i\neq k}(x - x_i). \qquad (3.3.1)$$

En consecuencia, si $p \in \mathbb{P}_n$ es tal que $p(x_k) = z_k$, se puede expresar de la forma

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} z_k l_k(x),$$

es decir,

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z_k}{\prod_{i\neq k}(x_k - x_i)} \prod_{i\neq k}(x - x_i). \qquad (3.3.2)$$

A los polinomios $\{l_0, \ldots, l_n\}$, definidos en (3.3.1) se les llama polinomios de Lagrange, y a la expresión de $p(x)$ dada por (3.3.2), *fórmula de interpolación de Lagrange.*

3.4 Fórmula de Newton para el problema de interpolación polinómica

Consideremos, de nuevo, el problema de interpolación polinómica clásico para una función $f(x)$ definida en los puntos $x_0, \ldots, x_n$. Podemos expresar el polinomio p de interpolación en la forma

$$p_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + A_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}),$$

lo cual facilita el cálculo del polinomio $p_{n+1}(x)$ en los $n+2$ puntos $x_0, \ldots, x_n, x_{n+1}$, sin más que sumar a $p_n(x)$ el término $A_{n+1}(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n)$:

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) = \; & A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + A_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}) + \\ & A_{n+1}(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n) \end{aligned}$$

lo cual es una gran ventaja.

Sólo queda conocer un algoritmo para el cálculo de los coeficientes A_k, para $k = 0, 1, \ldots, n$, a los que llamaremos *diferencias divididas* y se denotarán por

$$A_k = f[x_0, \ldots, x_k].$$

Se puede comprobar, a partir del polinomio de interpolación de Lagrange, que

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}, \quad \forall\, k = 1, \ldots, n,$$

siendo

$$f[x_k] = f(x_k), \quad \forall\, k = 0, \ldots, n.$$

Por tanto, construyendo una tabla del siguiente tipo:

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & f[x_0] & & & & \\
 & & f[x_0, x_1] & & & \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
 & & f[x_1, x_2] & & & \\
x_2 & f[x_2] & \ldots & \ldots & \ldots & f[x_0, x_1, \ldots, x_n], \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
\ldots & \ldots & \ldots & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] & & \\
 & & f[x_{n-1}, x_n] & & & \\
x_n & f[x_n] & & & &
\end{array}$$

se obtienen los coeficientes del polinomio buscado como los primeros elementos de las columnas de la misma. En definitiva, el polinomio obtenido es

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_n) \quad (3.4.1)$$

y se denomina *polinomio de interpolación de Newton* para el problema de interpolación polinómica clásico.

3.5 Estudio del error de interpolación

Sea $p(x)$ el único polinomio de interpolación de f en $x_0, \ldots, x_n$, expresado en cualquier forma. El error que se comete a aproximar $f(x)$ por el valor de $p(x)$, para cualquier x, es

$$E(x) = f(x) - p(x),$$

y una expresión del mismo puede deducirse para cualquiera de las formas en que puede expresarse $p(x)$.

Teorema 3.2 *El error de interpolación de $f(x)$ por el valor de $p(x)$, siendo p el polinomio de interpolación de f en $x_0, \ldots, x_n$, puede escribirse en la forma*

$$E(x) = f[x_0, \ldots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i). \tag{3.5.1}$$

DEMOSTRACIÓN De la expresión (3.4.1) de Newton para el polinomio de interpolación se deduce que

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f(x_k) - p_{k-1}(x_k)}{\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} (x_k - x_i)}, \ k \geq 1.$$

Entonces, se tiene que

$$f[x_0, \ldots, x_n, x] = \frac{f(x) - p(x)}{\displaystyle\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)},$$

de donde se concluye el resultado deseado. □

Pero la expresión (3.5.1) del error de interpolación no es muy apropiada ya que requiere una estimación previa de la diferencia dividida $f[x_0, \ldots, x_n, x]$. A continuación se dan una serie de resultados para resolver este problema, en función de la derivada $n+1$-ésima de f, siempre que esta exista.

Teorema 3.3 *Sea $f \in C^n([a,b])$ y $x_0, \ldots, x_n$, $n+1$ puntos distintos de $[a,b]$. Entonces, existe $\xi \in [a,b]$ tal que*

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

DEMOSTRACIÓN Consideremos la función error de interpolación $E(x) = f(x) - p(x)$, que es de clase $C^n([a,b])$.

Por hipótesis de interpolación, $E(x)$ se anula en los $n+1$ puntos $x_0, \ldots, x_n$, y, por tanto, aplicando el teorema de Rolle, $E'(x)$ se anula en n puntos intermedios.

Aplicando de nuevo el teorema de Rolle se tiene que $E''(x)$ se anula en $n-1$ puntos intermedios entre $x_0, \ldots, x_n$.

Reiterando el proceso n veces, se deduce que $E^{(n)}(x)$ se anula, al menos, en un punto ξ intermedio entre los puntos de interpolación. Por tanto,

$$E^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - p^{(n)}(\xi) = 0.$$

Teniendo en cuenta la fórmula de Newton para el polinomio de interpolación se tiene que $p^{(n)}(\xi) = f[x_0, \ldots, x_n]n!$ y, por tanto,

$$f^{(n)}(\xi) - f[x_0, \ldots, x_n]n! = 0,$$

de donde se concluye que

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

$\square$

Teorema 3.4 *Sea $f \in C^{n+1)}([a, b])$ y $x_0, \ldots, x_n$, $n + 1$ puntos distintos de $[a, b]$. Si $E(x)$ es el error de interpolación polinómica de f en los puntos $x_0, \ldots, x_n$, entonces existe $\xi \in [a, b]$ tal que*

$$E(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Demostración Del teorema 3.3 se deduce que existe $\xi \in [a, b]$ tal que

$$f[x_0, \ldots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

y teniendo en cuenta el teorema 3.2 se concluye que

$$E(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

$\square$

▽ Ejercicios

1.- Estudie el problema de interpolación: encontrar un polinomio $p \in \mathbb{P}_2[x]$ tal que $p(x_0) = f(x_0)$, $p'(x_1) = f'(x_1)$, $p'(x_2) = f'(x_2)$.

2.- Estudie el problema de interpolación: encontrar $p \in V$ tal que $p(x_0) = f(x_0)$, $p(x_1) = f(x_1)$ y $p'(x_0) = f'(x_0)$, siendo V el espacio fectorial generado por las funciones $\{1, \operatorname{sen} x, \cos x\}$.

3.- Sea V el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales generado por $\{1, x^2\}$. Estúdiese el problema de interpolación en V asociado a los datos $f(a)$ y $f(b)$, donde f es una función real de variable real definida en a y b.

4.- Halle las funciones de base $l_k(x)$ de Lagrange para el problema clásico de Hermite en dos nodos x_0 y x_1.

5.- Una viga está sujeta por un extremo y libre por el otro. La caída en el extremo libre es de 10 cm y la longitud total es de 20 m. Aproxime la forma de la viga mediante una parábola.

6.- Un cable que une dos postes de igual altura, separados 100 metros en un llano tiene una caída de 2 metros en la parte central. Aproxime, mediante una parábola, la caída del cable. Utilícese esta aproximación para estimar la caída a 25 metros del extremo.

7.- Las vías de un tren están separadas 10 metros y se va a realizar un cambio de vía con una longitud de 20 metros. Calcular la cúbica del cambio de vía.

8.- Aproxime, usando polinomios de grado 1, en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, los siguientes datos de una función

x_i	0	2	3	4	6
$f(x_i)$	2	4	3	4	2

a) El aproximante es una poligonal, ¿de qué clase?

b) ¿Podría obtenerse un aproximante formado por polinomios a trozos de grado 2 (parábolas) que interpolase a los datos anteriores y tuviese clase 1? En caso afirmativo, ¿podría interpolar este aproximante otro dato más?

c) Supongamos que se conoce $f'(3) = 0$, además de los datos de la tabla anterior. Calcule, si es posible, una función formada por parábolas en cada subintervalo que, globalmente, sea de clase 1.

9.- Calcule el polinomio $p \in \mathbb{P}_4[x]$ tal que $p(0) = 1$, $p(1) = 1$, $p(2) = 5$, $p(3) = 19$, $p(4) = 19$, usando

a) la fórmula de Lagrange,

b) la fórmula de Newton.

10.- Estudiar el problema de interpolación: encontrar un polinomio p de grado no mayor que 2 tal que $p(x_0) = z_0$, $p(x_1) = z_1$ y $p'(x_2) = z_2$.

11.- Escriba, mediante la fórmula de Lagrange, un polinomio de grado no mayor que 2 que tome los valores $1, 2, -1$, en los puntos $0, 1, -2$.