Análisis Numérico

E.T.S. de Caminos, Canales y Puertos – Universidad de Granada

Relaciones de problemas n° 7

1. Encuentre un cambio de variable que reduzca el siguiente problema de contorno autoadjunto con condiciones de contorno mixtas a condiciones homogéneas:

$$\big(p\,(x)\; y'(x)\big)' - q(x)\, y\,(x) = f(x), \quad x \in [x_a, x_b]$$
$$y'(x_a) = y_a^{(1)}, \quad y(x_b) = y_b,$$

   siendo p, q, $f : [x_a, x_b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones con $q,\, f \in \mathcal{C}\,([x_a, x_b])$ y $p \in \mathcal{C}^1\,([x_a, x_b])$ y dar la expresión de dicho problema homogéneo resultante.

2. Aplique el método de diferencias finitas al problema de contorno

$$(P) \left\{ \begin{array}{c} y''(x) = f(x), \quad x \in [0, l] \\ y(0) = 0 = y(l) \end{array} \right.$$

   y una partición del intervalo $[0, l]$ con nodos equidistantes: $x_i = 0 + i\frac{l}{n}$, $i = 0, \ldots n$.

3. Halle mediante el método de diferencias finitas de paso $h = 0.25$ la solución del problema de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} xy'' + y' - y = 0, \; x \in (0, 1), \\ y(0) = 1, \; y(1) = 0. \end{array} \right.$$

4. Halle mediante el método de diferencias finitas de paso $h = \frac{\pi}{2}$ la solución del problema de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' - y = \cos x, \; x \in (0, 2\pi), \\ y(0) = 1, \; y(2\pi) = 0, \end{array} \right.$$

5. Sabiendo que la ecuación que modeliza la flexión de una viga sometida a la acción de fuerzas externas es de la forma

$$y^{iv)}(x) = f(x), \qquad x \in I \equiv [a, b]$$

   con función de carga $f(x)$ por unidad de longitud.

   a) Obtenga un método en diferencias finitas para aproximar dicha ecuación en el caso de condiciones de frontera apropiadas para los casos de una viga empotrada, simplemente apoyada, en voladizo y empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro.

   b) Resuelva este problema para una función peso que sea fácil de calcular a mano, por ejemplo $f(x) \equiv -1$, en un intervalo simétrico, $I \equiv [-1, 1]$, y paso $h = 1/2$. Hacerlo para los cuatro casos considerados en el problema anterior y comparar los resultados con las soluciones exactas en cada caso.

6. Use indistintamente el método de Ritz o el de Galerkin para hallar la segunda aproximación de la solución de los siguientes problemas de contorno, dados en forma autoadjunta o no autoadjunta, a partir del sistema polinómico usual:

a) $\begin{cases} y''(x) - (1+x)y(x) = 1, \ x \in]0,1[\\ y(0) = 1, \qquad\qquad y(1) = 2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2\, y''(x) + y'(x) - x\, y(x) = 0, \ x \in]2,5[\\ y(2) = 1, \qquad\qquad y(5) = 10. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x\, y''(x) + 3\, y'(x) - 7x^3\, y(x) = 4x^2, \ x \in]0,1[\\ y(0) = 1, \qquad\qquad y(1) = 2. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2\, y''(x) + y'(x) - x\, y(x) = 0, \ x \in]2,5[\\ y(2) = 1, \qquad\qquad y'(5) = 0. \end{cases}$

e) $\begin{cases} y''(x) - (1+x)\ y(x) = 1, \qquad x \in]0,1[\\ y'(0) = 1, \qquad\qquad y'(1) = 2. \end{cases}$

f) $\begin{cases} \left((x^2+1)\ y'(x)\right)' - e^{2x}\, y(x) = 1, \ x \in]0,1[\\ y(0) = 0, \qquad\qquad y(1) = 1. \end{cases}$

7. Halle la segunda aproximación, por el método de Ritz de la solución del problema de contorno:

$$\begin{cases} xy'' + y' - y = 0, \ x \in (0,1), \\ y(0) = 1, \ y(1) = 0, \end{cases}$$

a partir del sistema polinómico.

8. Halle la segunda aproximación por el Método de Ritz de la solución del problema

$$\begin{cases} y'' - y = \cos \pi x, \ x \in (0,1), \\ y(0) = 1, \ y(1) = 0, \end{cases}$$

a partir del sistema trigonométrico usual.