Análisis Numérico
E.T.S. de Caminos, Canales y Puertos – Universidad de Granada
Relación de problemas n° 5

1. Encontrar una fórmula de derivación numérica para calcular $f'(c)$ a partir de los valores de f en $c-h, \quad c+h$, que sea exacta para todo polinomio de grado ≤ 1. ¿Tiene esta formula más exactitud de la exigida?

2. Encontrar una fórmula de derivación numérica para calcular $f'(c)$ a partir de los valores de f en $c-2h, \quad c-h, \quad c+h, \quad c+2h$, que sea exacta para todo polinomio de grado ≤ 3. ¿Tiene esta formula más exactitud de la exigida?

3. Determinar una fórmula de integración numérica para calcular $\int_0^b f(x)dx$, haciendo uso de los valores de la función f en $\frac{b}{4}, \frac{b}{2}$ y $\frac{3b}{4}$, que sea exacta para todo polinomio de grado ≤ 2. ¿Tiene la formula resultante la exactitud exigida?

4. Demostrar que para conocer la integral determinada por un polinomio de grado tres en un intervalo, es suficiente saber los valores de dicho polinomio en los extremos del intervalo, y en el punto medio del mismo.

5. Determinar la fórmula de Newton-Cotes abierta con tres puntos.

6. Hallar los a_i para que la fórmula:

$$f'(\frac{a+b}{2}) \approx a_1 f(a) + a_2 f(\frac{a+b}{2}) + a_3 f(b)$$

sea de tipo interpolatorio. Hallar el error que se comete y escribir una fórmula para $f'(\frac{a+b}{2})$ que no sea de tipo interpolatorio. ¿Puede haber dos fórmulas distintas de este tipo que sean ambas de tipo interpolatorio?

7. Se desea conocer, de forma aproximada, el valor $f''(0)$ usando una fórmula de derivación numérica del tipo

$$f''(0) \approx Af(-2) + Bf(-1) + Cf(0) + Df(1) + Ef(2) \tag{1}$$

   a) Usando el método de Newton, obtener $A,\ B,\ C,\ D\ y\ E$ en (1) siguiendo la idea de fórmula de tipo interpolatorio en sentido clásico.
   b) Deducir la fórmula dada en a) utilizando la técnica de desarrollo por Taylor de f (supuesta ésta suficientemente derivable).
   c) Desde b), comprobar que el error cometido en la fórmula (1) es de la forma $M\, f^{vi)}(\xi)$ con $f \in \mathcal{C}^6([-2,2])$, calculando el valor de M.
   d) Aproximar $f''(0)$ con la fórmula obtenida en a) para

$$f(x) = \left(1+x^2\right)^{-1}$$

8. Queremos construir la fórmula de integración de Hermite con dos nodos. Para ello:

i) Imponiendo exactitud en P_3 determinar los coeficientes de

$$\int_0^1 f(x)\,dx \;\approx\; A\,f(0) + B\,f(1) + C\,f'(0) + D\,f'(1) \tag{2}$$

ii) Construir el polinomio que interpola a f y f' en $x = 0$ y $x = 1$ para obtener nuevamente (3).

iii) Con un cambio de variable adecuado, determinar los coeficientes en la fórmula:

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; A\,f(a) + B\,f(b) + C\,f'(a) + D\,f'(b) + R(f)$$

iv) Determinar la fórmula compuesta y aplicarla para el cálculo de la siguiente integral.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

.