Análisis Numérico
E.T.S. de Caminos, Canales y Puertos – Universidad de Granada
Relación de problemas n° 4

1. Se desea interpolar una tabla de valores:

t	t_1	t_2	t_3	$\dots$	t_n
y	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_n

con $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, usando funciones splines cuadráticas con nodos en los puntos $t_1,\ t_2, \dots,\ t_n$. Se trata, por tanto, de hallar $s \in S_2^1(t_1, \dots, t_n)$ tal que:

$$s(t_i) = y_i \qquad i = 1,\ 2, \dots, n.$$

   (a) Llamando $s_i(t)$ a la restricción de $s(t)$ en $[t_i,\ t_{i+1}]$, halle la expresión de $s_i(t)$ imponiendo que : $s_i(t_i) = y_i, \quad s_i'(t_i) = d_i, \quad s_i'(t_{i+1}) = d_{i+1}$. (Para simplificar llámese $h_i = t_{i+1} - t_i$)

   (b) Hállense las relaciones lineales que deben existir entre los d_i para que s sea continua y con derivada primera continua en $[t_1,\ t_n]$.

   (c) Explique, a partir de b), que tomando d_1 arbitrario y, luego, construyendo $d_2,\ d_3, \dots, d_n$ cumpliendo la relación obtenida allí pueden escribirse inmediatamente las $s_i(t)$, es decir, $s(t)$.

   (d) ¿ Cuántas soluciones admite, en consecuencia, el problema considerado ?

2. Determine si es spline cuadrático la función siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in]-\infty,\ 1] \\ -\frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{3}{2} & x \in [1,\ 2] \\ \frac{3}{2} & x \in [2, \infty[\end{cases}$$

3. Determine los valores de $a,\ b,\ c$ para los que la función $f(x)$ es un spline cúbico con nodos $0,\ 1,\ 2$:

$$f(x) = \begin{cases} 3 + x - 9x^2 & x \in [0,\ 1] \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & x \in [1,\ 2] \end{cases}$$

4. Calcule el spline cúbico natural que interpola los datos:

x	0	1	2	3
y	1	1	0	10

5. La pérdida de actividad de un preparado hormonal, en el transcurso del tiempo, viene dada por la tabla:

t_i	1	2	3	4	5
Porc.act. (A_i)	90	75	42	30	21

   (a) Calcule el Interpolante Spline Cuadrático tomando $A'(1) = -1$.

   (b) ¿ Es $A(t)$ decreciente ?

6. Calcule $s \in S_3^2(-1,0,2)$ verificando:

$$s''(-1) = 6, \quad s''(0) = 6, \quad s''(2) = 0, \quad s(-1) = 3, \quad s(2) = 8.$$

7. Si $s(x)$ es el interpolante de $S_2^1(\Delta)$ para la función $f(x)$; entonces, se puede tomar el valor de

$$\int_a^b s(x)dx$$

como aproximación al valor de

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Así, dé un valor aproximado para $\int_0^1 xe^x dx$,

(a) tomando $\Delta = \{0, 1/2, 1\}$;

(b) tomando $\Delta = \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$.

(c) Compare a) y b) con el valor exacto de la integral propuesta. ¿ Qué se puede decir respecto a las aproximaciones dadas ?

8. Una vía férrea que bordea un campo rectangular ha de rodear una de sus esquinas (ver Figura 1). Para resolver el problema se escogió como solución una función spline cúbico de clase 2 que conectaba las vías rectas en los puntos P y R a través del punto Q.

Las condiciones que dicho spline había de cumplir eran:

$$s(-1) = 1; \; s(0) = 0; \; s(1) = 1; \; s'(-1) = -1; \; s'(1) = 1 \; .$$

(a) Calcúlese el spline.

(b) ¿ De qué clase es la conexión en el punto Q?

(c) ¿ De qué clase es la conexión en los puntos P y R? Justifique las respuestas.

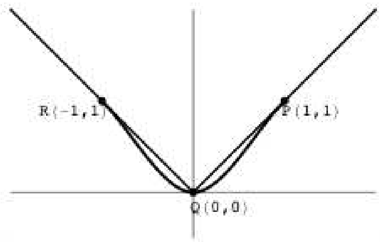

Figure 1: Trazado del spline.