Análisis Numérico
E.T.S. de Caminos, Canales y Puertos – Universidad de Granada
Relación de problemas n° 3

1. (a) Estudie el problema de interpolación consistente en hallar un polinomio de grado menor o igual que 2 verificando las condiciones:

$$p(x_0) = z_0, \quad p(x_1) = z_1, \quad p'(x_2) = z_2.$$

   (b) Escriba la fórmula de Lagrange para el problema anterior en el caso en que $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$.

2. Discuta la unisolvencia del problema siguiente: Hallar $p \in \mathbb{P}_3$ verificando:

$$p(x_i) = y_i, \quad p''(x_i) = y_i'', \quad i = 1, 2$$

3. ¿Queda unívocamente determinado un polinomio de grado no mayor que tres por los datos :

   i) $p(0),\ p(1),\ p'(1),\ p''(0)$?
   ii) $p(0),\ p'(0),\ p'(-1),\ p''(-\frac{1}{2})$?

4. Discuta la existencia y/o unicidad de solución de los problemas de Interpolación asociados a los datos, D, y espacios, V, siguientes:

   a) $D = \left\{L_1(f) = f(0), L_2(f) = \int_0^1 f(x)dx, L_3(f) = f(1)\right\}$, $V = \{p \in \mathbb{P}_3 : p'(0) = 0\}$.
   b) $D = \{L_1(f) = f(x_1), L_2(f) = f'(x_2)dx, L_3(f) = f''(x_3)\}$ con $V = \mathbb{P}_2$.
   c) $D = \{L_1(f) = f(0), L_2(f) = f'(1/2), L_3(f) = f(1)\}$ tomando $V_1 = \mathbb{P}_2$

5. Obtenga la expresión de los $l_k(x)$ en el problema de interpolación de Hermite.

6. Calcule mediante la fórmula de interpolación de Lagrange una cúbica que pase por los puntos: $(-1, 2)$, $(0, 3)$, $(1, 2)$ y $(2, 0)$.

7. Se considera el espacio vectorial:

$$V = \left\{p(x) \in \mathbb{P}_3; \quad p''(1) = 0\right\}$$

   y en él las formas lineales $L_i(p) = p(x_i)$ para $i = 1,\ 2,\ 3$ y el problema de interpolación:

$$L_i(p) = w_i \qquad \textit{para} \qquad i = 1,\ 2,\ 3$$

   donde $p \in V$ y los w_i son arbitrarios.

   (a) Construya una base de V y estudie la existencia y unicidad de la solución del problema siendo: $x_1 = 0,\ x_2 = 1$ y $x_3 = 3$.
   (b) Demuestre que existen puntos x_i para los que no hay existencia o unicidad de la solución.
   (c) Halle los $l_k \in V$ tales que $L_i(l_k) = \delta_{ik}$, tomando los puntos del primer apartado.

8. Encuentre las formas de Lagrange y de Newton de los polinomios de interpolación para los datos:

(a)

x	-2	0	1
$f(x)$	0	1	-1

(b)

x	1	2	0	3
$f(x)$	3	2	-4	5

9. La ecuación $x - 9^{-x} = 0$ tiene una solución de $[0,\ 1]$. Encuentre el polinomio de interpolación en $0,\ 0.5,\ 1$, para la función en el lado izquierdo de la ecuación. Igualando a cero el polinomio y resolviendo dicha ecuación, calcule una solución aproximada de la ecuación inicial.

10. Construya la tabla de diferencias divididas de la función $f(x) = x^3$ en los puntos $0,\ 1,\ 3,\ 4$ y a partir de ellas escriba el polinomio de interpolación.

11. Estudie el problema siguiente: Hallar $p(x) = a + b \operatorname{sen} x + c \cos x$ con $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ verificando:

$$p(x_0) = f(x_0), \quad p'(x_0) = f'(x_0), \quad p(x_1) = f(x_1) \qquad \texttt{con} \quad x_0 \neq x_1$$

.