

Análisis Numérico
E.T.S. de Caminos, Canales y Puertos – Universidad de Granada
Relación de problemas nº 2

1. Aplicando el método de bisección, halle la raíz aproximada de la ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ en el intervalo $[1, 2]$, con un error menor que 10^{-3} . ¿Cuántas iteraciones son suficientes?
2. Pruebe que la función $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ es contractiva en $[1, 2]$ con constante de contractividad $L = \frac{1}{2}$.
3. Demuestre que el método de Newton–Raphson tiene orden de convergencia cuadrático.
4. (a) Hállense las condiciones que debe cumplir la función $h(x)$ para que la iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} h(x_n)$$

produzca \sqrt{c} (con c real positivo) con convergencia, al menos, cúbica si se parte de un x_0 próximo a \sqrt{c} .

- (b) Calcúlese $h(x)$ de la forma $a + bx^2$ verificando tales condiciones.
5. Se considera la ecuación $f(x) = 0$, donde f es una función con un cero simple y suficientemente regular. Para obtener dicha raíz r se usa el método

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n - f(x_n)f'(x_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots \\x_0 &= \text{aprox. inicial}\end{aligned}$$

¿Qué condiciones ha de satisfacer f para que el método converja localmente a r , con orden de convergencia, al menos, cúbico?

6. Para obtener \sqrt{a} se utiliza el método iterativo

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a} \quad n = 0, 1, 2, \dots \\x_0 &= \text{aprox. inicial}\end{aligned}$$

- (a) Determínese el orden de convergencia del método.
- (b) Aplíquese dicho método partiendo de $x_0 = 2$ para calcular $\sqrt{5}$ con dos decimales exactos.
7. ¿Qué se puede decir si para un método iterativo de la forma $x_{n+1} = g(x_n)$ existe un m tal que $x_{m+1} = x_m$?

8. Se desean hallar por iteración las raíces positivas de la ecuación $x + \ln(x) = 0$, y se presentan los métodos siguientes

$$1) x_{n+1} = -\ln(x_n)$$

$$2) x_{n+1} = e^{-x_n}$$

$$3) x_{n+1} = \frac{x_n + e^{-x_n}}{2}$$

- (a) ¿Hay alguno de ellos cuyo uso no sea aconsejable?
- (b) ¿Cuál es el más adecuado de los tres?
9. (a) Pruebe que, mediante el método de Newton-Raphson, se puede calcular el inverso de un número sin efectuar divisiones (sólo sumas, restas y multiplicaciones).
- (b) Calcule $\pi^{-1} = 0.3183098\dots$ por el método del apartado anterior, tomando $x_0 = 10$, y $x_0 = 0.3$.
10. ¿Qué condiciones ha de cumplir el parámetro α para asegurar la convergencia lineal de la iteración $x_{n+1} = x_n - \alpha f(x_n)$ a un cero de $f(x)$ con x_0 apropiado?