

Tema 2

Resolución numérica de ecuaciones:

Métodos de iteración funcional



Universidad
de Granada

Departamento de
Matemática
Aplicada



Índice de contenidos

- Métodos de iteración funcional,
- Análisis de la convergencia.
- Aplicaciones contractivas.
- Revisión del método de Newton-Raphson.



Universidad
de Granada

Departamento de
Matemática
Aplicada



Métodos de iteración funcional

La ecuación $f(x) = 0$ puede escribirse de manera equivalente bajo multitud de expresiones que adopten una forma de tipo punto fijo

$$x = g(x)$$

mediante la cual se puede generar iterativamente una sucesión de valores a partir de un valor inicial x_0 :

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad k \geq 0.$$



Métodos de iteración funcional

La ecuación $f(x) = 0$ puede escribirse de manera equivalente bajo multitud de expresiones que adopten una forma de tipo punto fijo

$$x = g(x)$$

mediante la cual se puede generar iterativamente una sucesión de valores a partir de un valor inicial x_0 :

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad k \geq 0.$$



Métodos de iteración funcional

La ecuación $f(x) = 0$ puede escribirse de manera equivalente bajo multitud de expresiones que adopten una forma de tipo punto fijo

$$x = g(x)$$

mediante la cual se puede generar iterativamente una sucesión de valores a partir de un valor inicial x_0 :

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad k \geq 0.$$



Métodos de iteración funcional

La ecuación $f(x) = 0$ puede escribirse de manera equivalente bajo multitud de expresiones que adopten una forma de tipo punto fijo

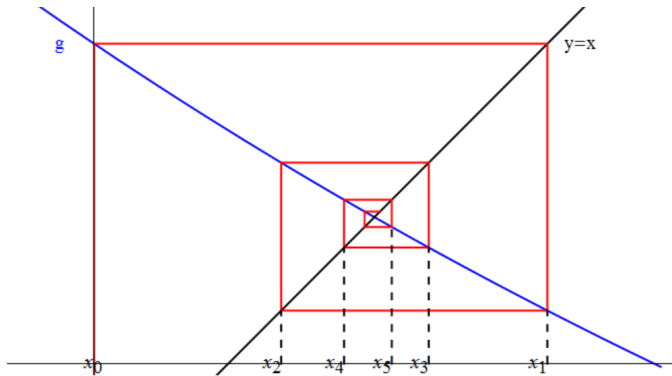
$$x = g(x)$$

mediante la cual se puede generar iterativamente una sucesión de valores a partir de un valor inicial x_0 :

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad k \geq 0.$$

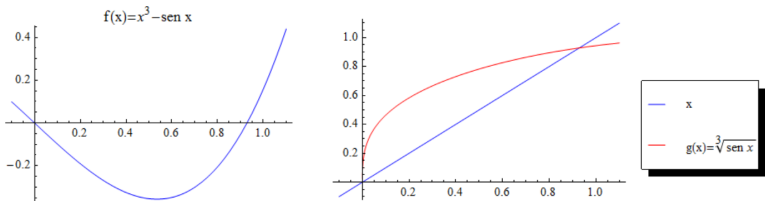


Métodos de iteración funcional



Métodos de iteración funcional

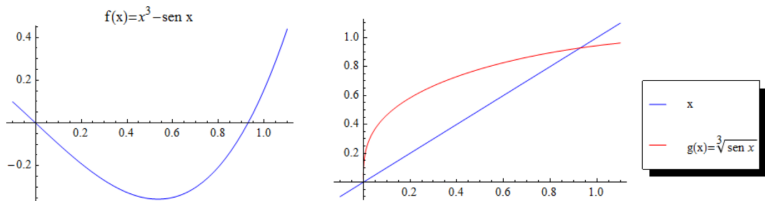
Geométricamente, se pasa de la búsqueda de puntos de corte de la gráfica $y = f(x)$ con el eje de abscisas OX a la búsqueda de puntos intersección entre las dos gráficas de ecuaciones $y = x$ e $y = g(x)$.



Según elijamos esta función g tendremos uno u otro método de entre todos los posibles, siempre y cuando $f(x) = 0$ resulte equivalente a $x = g(x)$. Unos serán convergentes y otros no.

Métodos de iteración funcional

Geométricamente, se pasa de la búsqueda de puntos de corte de la gráfica $y = f(x)$ con el eje de abscisas OX a la búsqueda de puntos intersección entre las dos gráficas de ecuaciones $y = x$ e $y = g(x)$.

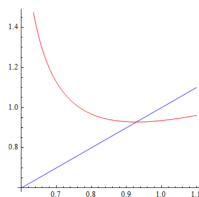
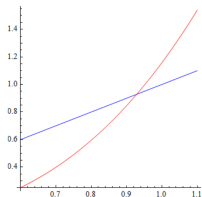
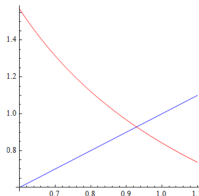
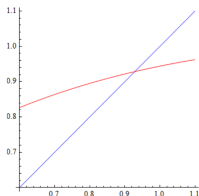


Según elijamos esta función g tendremos uno u otro método de entre todos los posibles, siempre y cuando $f(x) = 0$ resulte equivalente a $x = g(x)$. Unos serán convergentes y otros no.

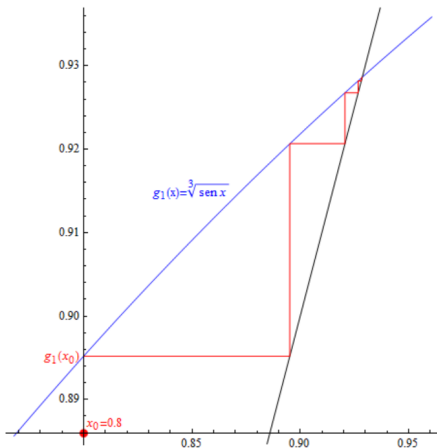
¿De qué depende la convergencia?

$$f(x) = \sin x - x^3 \quad g_1(x) = \sqrt[3]{\sin x} \quad g_2(x) = \frac{\sin x}{x^2}$$

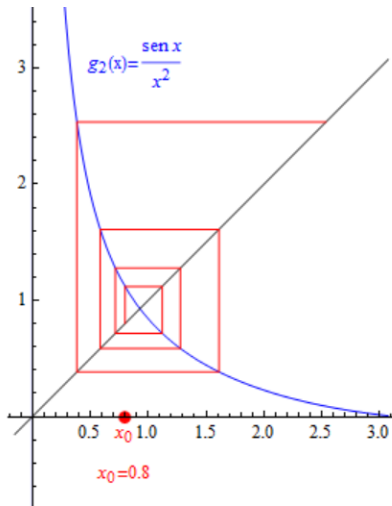
$$g_3(x) = x + \sin x - x^3 \quad g_4(x) = x - \frac{\sin x - x^3}{\cos x - 3x^2}$$



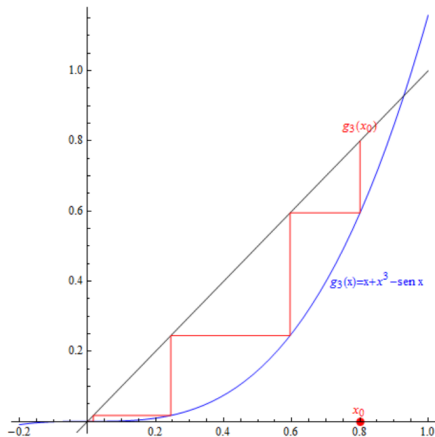
¿De qué depende la convergencia? Esquema g_1



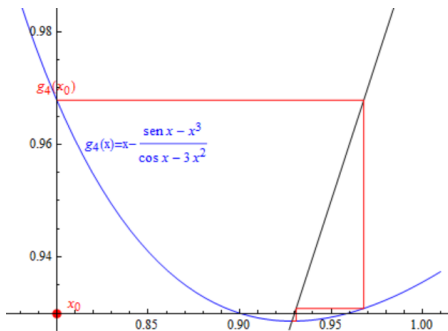
¿De qué depende la convergencia? Esquema g_2



¿De qué depende la convergencia? Esquema g_3



¿De qué depende la convergencia? Esquema g_4



¿De qué depende la convergencia?

$$s : f(s) = 0 \quad (\Longleftrightarrow s = g(s))$$

$$\mu_1 := x_1 - x_0$$

$$\mu_{k+1} := \frac{x_{k+1} - s}{x_k - s} \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k - x_{k-1}} \quad (\text{para } k \geq 1 \text{ suficientemente grande})$$

$x_0 = 1$	g_1	g_2	g_3	g_4
x_1	0.94408924124306	0.84147098480790	0.84147098480790	0.93554939065467
μ_1	-0.05591075875694	-0.15852901519210	-0.15852901519210	-0.06445060934533
x_2	0.93215560685805	1.05303224555943	0.99127188988250	0.92989141894368
μ_2	0.21344075183985	-1.33452706115132	-0.94494313796800	0.08778771478600
x_3	0.92944074461587	0.78361086350974	0.85395152069647	0.92886679103170
μ_3	0.22749668328899	-1.27349109705917	-0.91668584457246	0.18109456255982
x_4	0.92881472066057	1.14949345383611	0.98510419085185	0.92867234089417
μ_4	0.23059142581182	-1.35803100534498	-0.95508533025939	0.18977634246913
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{26}	0.92862630873173	-0.00000000000000	0.89462921748990	0.92862630873173
μ_{26}	0	-1.00000000000000	-0.97525571602895	—
x_{27}	0.92862630873173	0	0.89614104323697	0.92862630873173
μ_{27}	—	-1.00000000000000	-0.97635939022401	—



¿De qué depende la convergencia?

$$s : f(s) = 0 \quad (\Longleftrightarrow s = g(s))$$

$$\mu_1 := x_1 - x_0$$

$$\mu_{k+1} := \frac{x_{k+1} - s}{x_k - s} \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k - x_{k-1}} \quad (\text{para } k \geq 1 \text{ suficientemente grande})$$

$x_0 = 1$	g_1	g_2	g_3	g_4
x_1	0.94408924124306	0.84147098480790	0.84147098480790	0.93554939065467
μ_1	-0.05591075875694	-0.15852901519210	-0.15852901519210	-0.06445060934533
x_2	0.93215560685805	1.05303224555943	0.99127188988250	0.92989141894368
μ_2	0.21344075183985	-1.33452706115132	-0.94494313796800	0.08778771478600
x_3	0.92944074461587	0.78361086350974	0.85395152069647	0.92886679103170
μ_3	0.22749668328899	-1.27349109705917	-0.91668584457246	0.18109456255982
x_4	0.92881472066057	1.14949345383611	0.98510419085185	0.92867234089417
μ_4	0.23059142581182	-1.35803100534498	-0.95508533025939	0.18977634246913
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{26}	0.92862630873173	-0.00000000000000	0.89462921748990	0.92862630873173
μ_{26}	0	-1.00000000000000	-0.97525571602895	-
x_{27}	0.92862630873173	0	0.89614104323697	0.92862630873173
μ_{27}	-	-1.00000000000000	-0.97635939022401	-



Análisis de la convergencia

Si $s \in \mathbb{R}$ es un punto fijo o raíz de la ecuación $x = g(x)$, para el error de la aproximación n -ésima $e_k = s - x_k$ se tiene, en el supuesto de que g sea derivable, que

$$|s - x_{k+1}| = |g(s) - g(x_k)| = |g'(\xi)| |s - x_k|$$

para cierto ξ entre s y x_k .

Por tanto, el error en la etapa k -ésima disminuye en valor absoluto si la función g' es menor que 1 en un entorno de la solución y partimos de un punto de dicho entorno.

Es decir, en esas condiciones el método converge.



Análisis de la convergencia

Si $s \in \mathbb{R}$ es un punto fijo o raíz de la ecuación $x = g(x)$, para el error de la aproximación n -ésima $e_k = s - x_k$ se tiene, en el supuesto de que g sea derivable, que

$$|s - x_{k+1}| = |g(s) - g(x_k)| = |g'(\xi)| |s - x_k|$$

para cierto ξ entre s y x_k .

Por tanto, el error en la etapa k -ésima disminuye en valor absoluto si la función g' es menor que 1 en un entorno de la solución y partimos de un punto de dicho entorno.

Es decir, en esas condiciones el método converge.



Análisis de la convergencia

Si $s \in \mathbb{R}$ es un punto fijo o raíz de la ecuación $x = g(x)$, para el error de la aproximación n -ésima $e_k = s - x_k$ se tiene, en el supuesto de que g sea derivable, que

$$|s - x_{k+1}| = |g(s) - g(x_k)| = |g'(\xi)| |s - x_k|$$

para cierto ξ entre s y x_k .

Por tanto, el error en la etapa k -ésima disminuye en valor absoluto si la función g' es menor que 1 en un entorno de la solución y partimos de un punto de dicho entorno.

Es decir, en esas condiciones el método converge.



Análisis de la convergencia

Si $s \in \mathbb{R}$ es un punto fijo o raíz de la ecuación $x = g(x)$, para el error de la aproximación n -ésima $e_k = s - x_k$ se tiene, en el supuesto de que g sea derivable, que

$$|s - x_{k+1}| = |g(s) - g(x_k)| = |g'(\xi)| |s - x_k|$$

para cierto ξ entre s y x_k .

Por tanto, el error en la etapa k -ésima disminuye en valor absoluto si la función g' es menor que 1 en un entorno de la solución y partimos de un punto de dicho entorno.

Es decir, en esas condiciones el método converge.



Análisis de la convergencia

Así pues, cuando $|g'(s)| < 1$, existe un entorno centrado en s en el cual hay convergencia, al menos local, del método de iteración funcional $x_{k+1} = g(x_k)$, $k \geq 0$, dado x_0 .

La situación más favorable se da cuando $g'(s) = 0$, o si algunas derivadas sucesivas siguen anulándose en s (digamos $g'(s) = g''(s) = \dots = g^{(p-1)}(s) = 0$, $g^{(p)}(s) \neq 0$), pues en tal caso

$$|s - x_{k+1}| = |g(s) - g(x_k)| = \frac{1}{p!} |g^{(p)}(\xi)| |s - x_k|^p.$$



Análisis de la convergencia

Así pues, cuando $|g'(s)| < 1$, existe un entorno centrado en s en el cual hay convergencia, al menos local, del método de iteración funcional $x_{k+1} = g(x_k)$, $k \geq 0$, dado x_0 .

La situación más favorable se da cuando $g'(s) = 0$, o si algunas derivadas sucesivas siguen anulándose en s (digamos $g'(s) = g''(s) = \dots = g^{(p-1)}(s) = 0$, $g^{(p)}(s) \neq 0$), pues en tal caso

$$|s - x_{k+1}| = |g(s) - g(x_k)| = \frac{1}{p!} |g^{(p)}(\xi)| |s - x_k|^p.$$



Análisis de la convergencia

Así pues, cuando $|g'(s)| < 1$, existe un entorno centrado en s en el cual hay convergencia, al menos local, del método de iteración funcional $x_{k+1} = g(x_k)$, $k \geq 0$, dado x_0 .

La situación más favorable se da cuando $g'(s) = 0$, o si algunas derivadas sucesivas siguen anulándose en s (digamos $g'(s) = g''(s) = \dots = g^{(p-1)}(s) = 0$, $g^{(p)}(s) \neq 0$), pues en tal caso

$$|s - x_{k+1}| = |g(s) - g(x_k)| = \frac{1}{p!} |g^{(p)}(\xi)| |s - x_k|^p.$$



Análisis de la convergencia

De donde se deduce que

$$|e_{k+1}| \cong C |e_k|^p$$

Se dice que el método es de *orden* $p \in \mathbb{N}$.

En la práctica, orden p (para $p > 1$) significa que cuando se está próximo a la solución en cada iteración el número de cifras exactas se *multiplica por* p .



Análisis de la convergencia

De donde se deduce que

$$|e_{k+1}| \cong C |e_k|^p$$

Se dice que el método es de *orden* $p \in \mathbb{N}$.

En la práctica, orden p (para $p > 1$) significa que cuando se está próximo a la solución en cada iteración el número de cifras exactas se *multiplica por* p .



Análisis de la convergencia

De donde se deduce que

$$|e_{k+1}| \cong C |e_k|^p$$

Se dice que el método es de *orden* $p \in \mathbb{N}$.

En la práctica, orden p (para $p > 1$) significa que cuando se está próximo a la solución en cada iteración el número de cifras exactas se *multiplica por* p .



Análisis de la convergencia

De donde se deduce que

$$|e_{k+1}| \cong C |e_k|^p$$

Se dice que el método es de *orden* $p \in \mathbb{N}$.

En la práctica, orden p (para $p > 1$) significa que cuando se está próximo a la solución en cada iteración el número de cifras exactas se *multiplica por* p .



Aplicaciones contractivas

Basándonos en el concepto de contracción en espacios métricos abstractos, podemos dar un resultado de convergencia *global* para el método de iteración funcional.

Definición

Una función real g definida en un cierto subconjunto cerrado (no necesariamente acotado) $I \subset \mathbb{R}$ es una *aplicación contractiva o contracción* si $g(I) \subset I$ y existe una constante $L \in [0, 1)$ tal que $|g(x) - g(y)| \leq L |x - y|$ para cualesquiera $x, y \in I$.



Aplicaciones contractivas

Basándonos en el concepto de contracción en espacios métricos abstractos, podemos dar un resultado de convergencia *global* para el método de iteración funcional.

Definición

Una función real g definida en un cierto subconjunto cerrado (no necesariamente acotado) $I \subset \mathbb{R}$ es una **aplicación contractiva o contracción** si $g(I) \subset I$ y existe una constante $L \in [0, 1)$ tal que $|g(x) - g(y)| \leq L |x - y|$ para cualesquiera $x, y \in I$.



Aplicaciones contractivas

Teorema

Si g es una aplicación contractiva, con constante de contracción $L < 1$, entonces existe una única raíz de la ecuación $x = g(x)$, que se puede obtener como límite de la sucesión $\{x_k\}_{k \geq 0}$ obtenida mediante el método iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$, partiendo de un valor arbitrario $x_0 \in I$.

Si $g \in C^1([a, b])$ y se verifica que $|g'(x)| \leq L < 1, \forall x \in [a, b]$ entonces

$$|s - x_k| \leq L^k |s - x_0| \leq \frac{L^k}{1 - L} |x_1 - x_0|$$

y, además,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{s - x_{k+1}}{s - x_k} = g'(s).$$



Aplicaciones contractivas

Teorema

Si g es una aplicación contractiva, con constante de contracción $L < 1$, entonces existe una única raíz de la ecuación $x = g(x)$, que se puede obtener como límite de la sucesión $\{x_k\}_{k \geq 0}$ obtenida mediante el método iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$, partiendo de un valor arbitrario $x_0 \in I$.

Si $g \in C^1([a, b])$ y se verifica que $|g'(x)| \leq L < 1, \forall x \in [a, b]$ entonces

$$|s - x_k| \leq L^k |s - x_0| \leq \frac{L^k}{1 - L} |x_1 - x_0|$$

y, además,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{s - x_{k+1}}{s - x_k} = g'(s).$$



Aplicaciones contractivas

Teorema

Si g es una aplicación contractiva, con constante de contracción $L < 1$, entonces existe una única raíz de la ecuación $x = g(x)$, que se puede obtener como límite de la sucesión $\{x_k\}_{k \geq 0}$ obtenida mediante el método iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$, partiendo de un valor arbitrario $x_0 \in I$.

Si $g \in C^1([a, b])$ y se verifica que $|g'(x)| \leq L < 1, \forall x \in [a, b]$ entonces

$$|s - x_k| \leq L^k |s - x_0| \leq \frac{L^k}{1 - L} |x_1 - x_0|$$

y, además,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{s - x_{k+1}}{s - x_k} = g'(s).$$



Aplicaciones contractivas

Teorema

Si g es una aplicación contractiva, con constante de contracción $L < 1$, entonces existe una única raíz de la ecuación $x = g(x)$, que se puede obtener como límite de la sucesión $\{x_k\}_{k \geq 0}$ obtenida mediante el método iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$, partiendo de un valor arbitrario $x_0 \in I$.

Si $g \in C^1([a, b])$ y se verifica que $|g'(x)| \leq L < 1, \forall x \in [a, b]$ entonces

$$|s - x_k| \leq L^k |s - x_0| \leq \frac{L^k}{1 - L} |x_1 - x_0|$$

y, además,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{s - x_{k+1}}{s - x_k} = g'(s).$$



Aplicaciones contractivas

Proposición

Sea g una función de clase $C^m([a, b])$ tal que la ecuación $x = g(x)$ tenga una solución $s \in [a, b]$ verificando $g'(s) = \dots = g^{(m-1)}(s) = 0$ con $g^{(m)}(s) \neq 0$. Sea x_0 un valor suficientemente próximo a la raíz.

Entonces la sucesión construida a partir de la iteración funcional $x_{k+1} = g(x_k)$ convergerá hacia s con un orden de convergencia $p = m$, cumpliéndose además que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{s - x_{k+1}}{(s - x_k)^m} = (-1)^{m-1} \frac{g^{(m)}(s)}{m!}.$$



Aplicaciones contractivas

Proposición

Sea g una función de clase $C^m([a, b])$ tal que la ecuación $x = g(x)$ tenga una solución $s \in [a, b]$ verificando $g'(s) = \dots = g^{(m-1)}(s) = 0$ con $g^{(m)}(s) \neq 0$. Sea x_0 un valor suficientemente próximo a la raíz.

Entonces la sucesión construida a partir de la iteración funcional $x_{k+1} = g(x_k)$ convergerá hacia s con un orden de convergencia $p = m$, cumpliéndose además que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{s - x_{k+1}}{(s - x_k)^m} = (-1)^{m-1} \frac{g^{(m)}(s)}{m!}.$$



Aplicaciones contractivas

Proposición

Sea g una función de clase $C^m([a, b])$ tal que la ecuación $x = g(x)$ tenga una solución $s \in [a, b]$ verificando $g'(s) = \dots = g^{(m-1)}(s) = 0$ con $g^{(m)}(s) \neq 0$. Sea x_0 un valor suficientemente próximo a la raíz.

Entonces la sucesión construida a partir de la iteración funcional $x_{k+1} = g(x_k)$ convergerá hacia s con un orden de convergencia $p = m$, cumpliéndose además que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{s - x_{k+1}}{(s - x_k)^m} = (-1)^{m-1} \frac{g^{(m)}(s)}{m!}.$$



Aplicaciones contractivas

Proposición

Sea g una función de clase $C^m([a, b])$ tal que la ecuación $x = g(x)$ tenga una solución $s \in [a, b]$ verificando $g'(s) = \dots = g^{(m-1)}(s) = 0$ con $g^{(m)}(s) \neq 0$. Sea x_0 un valor suficientemente próximo a la raíz.

Entonces la sucesión construida a partir de la iteración funcional $x_{k+1} = g(x_k)$ convergerá hacia s con un orden de convergencia $p = m$, cumpliéndose además que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{s - x_{k+1}}{(s - x_k)^m} = (-1)^{m-1} \frac{g^{(m)}(s)}{m!}.$$



Revisión del método de Newton-Raphson

El método de Newton Raphson es un método de iteración funcional para la función

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

siempre que exista f' y no se anule.

Si s es una raíz de la función f para dicho valor la función g vale precisamente s (s es punto fijo de g) y viceversa.



Revisión del método de Newton-Raphson

El método de Newton Raphson es un método de iteración funcional para la función

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

siempre que exista f' y no se anule.

Si s es una raíz de la función f para dicho valor la función g vale precisamente s (s es punto fijo de g) y viceversa.



Revisión del método de Newton-Raphson

El método de Newton Raphson es un método de iteración funcional para la función

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

siempre que exista f' y no se anule.

Si s es una raíz de la función f para dicho valor la función g vale precisamente s (s es punto fijo de g) y viceversa.



Revisión del método de Newton-Raphson

El método de Newton Raphson es un método de iteración funcional para la función

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

siempre que exista f' y no se anule.

Si s es una raíz de la función f para dicho valor la función g vale precisamente s (s es punto fijo de g) y viceversa.



Revisión del método de Newton-Raphson

Puede probarse fácilmente que, si f es dos veces derivable en s y $f'(s) \neq 0$, entonces

$$g'(s) = 1 - \frac{f'(s)^2 - f(s) f''(s)}{f'(s)^2} = \frac{f(s) f''(s)}{f'(s)^2} = 0$$

y, por tanto, la convergencia del método de Newton–Raphson es al menos de orden dos (o cuadrática).

El análisis de la convergencia de los métodos de la secante y de regula-falsi no puede hacerse de esta misma forma, ya que ninguno de ellos puede expresarse como un método de iteración funcional.



Revisión del método de Newton-Raphson

Puede probarse fácilmente que, si f es dos veces derivable en s y $f'(s) \neq 0$, entonces

$$g'(s) = 1 - \frac{f'(s)^2 - f(s) f''(s)}{f'(s)^2} = \frac{f(s) f''(s)}{f'(s)^2} = 0$$

y, por tanto, la convergencia del método de Newton–Raphson es al menos de orden dos (o cuadrática).

El análisis de la convergencia de los métodos de la secante y de regula-falsi no puede hacerse de esta misma forma, ya que ninguno de ellos puede expresarse como un método de iteración funcional.



Revisión del método de Newton-Raphson

Puede probarse fácilmente que, si f es dos veces derivable en s y $f'(s) \neq 0$, entonces

$$g'(s) = 1 - \frac{f'(s)^2 - f(s) f''(s)}{f'(s)^2} = \frac{f(s) f''(s)}{f'(s)^2} = 0$$

y, por tanto, la convergencia del método de Newton–Raphson es al menos de orden dos (o cuadrática).

El análisis de la convergencia de los métodos de la secante y de regula-falsi no puede hacerse de esta misma forma, ya que ninguno de ellos puede expresarse como un método de iteración funcional.



Revisión del método de Newton-Raphson

Puede probarse fácilmente que, si f es dos veces derivable en s y $f'(s) \neq 0$, entonces

$$g'(s) = 1 - \frac{f'(s)^2 - f(s) f''(s)}{f'(s)^2} = \frac{f(s) f''(s)}{f'(s)^2} = 0$$

y, por tanto, la convergencia del método de Newton–Raphson es al menos de orden dos (o cuadrática).

El análisis de la convergencia de los métodos de la secante y de regula-falsi no puede hacerse de esta misma forma, ya que ninguno de ellos puede expresarse como un método de iteración funcional.

