ECUACIONES DIFERENCIALES II
Curso 12-13

Relación de ejercicios 7: **Dependencia continua y diferenciable respecto de datos iniciales y parámetros. Estabilidad**

Dependencia continua y diferenciable

1.- Decide de forma razonada si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

1. Sea $x_\epsilon(t)$, $\epsilon \geq 0$, la solución de $x'' + \epsilon x' + x^3 = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$. Entonces $x_\epsilon(t)$ está definida en $[0, \infty)$ y
$$\lim_{\epsilon \to 0} x_\epsilon(t) \ = \ x_0(t), \text{ para cada } t \geq 0.$$

2. Sea $x_\epsilon(t)$, $\epsilon \geq 0$, la solución de $\epsilon x' + x^3 = 0$, $x(0) = 1$. Entonces $x_\epsilon(t)$ está definida en $[0, \infty)$ y
$$\lim_{\epsilon \to 0} x_\epsilon(t) \ = \ 0, \text{ para cada } t \geq 0.$$

3. Sea $x_\epsilon(t)$ la solución de $x' + \epsilon \operatorname{sen} x = 0$, $x(0) = 1$, $\epsilon \in I\!R$. Entonces $x_\epsilon(t)$ está definida en $[0, 1]$ y
$$\lim_{\epsilon \to 0} x''_\epsilon(t) \ = \ 0, \text{ uniformemente en } [0, 1].$$

2.- Sea $F : I\!R^2 \to I\!R$ de clase uno y T–periódica ($T > 0$) en la variable t, es decir,

$$F(t, x) = F(t + T, x) \quad \forall (t, x) \in I\!R^2.$$

Denotemos por $x(t; x_0)$ a la solución del PVI

$$x' = F(t, x),\ x(0) = x_0.$$

Supongamos que existen $x_1, x_2 \in I\!R$, con $x_1 < x_2$, tales que

$$F(t, x_1) > 0, F(t, x_2) < 0 \quad \forall t \in I\!R.$$

Se pide:

1. Prueba que la función $P : [x_1, x_2] \to I\!R$, $P(x_0) = x(T; x_0)$ está bien definida y es continua.

2. Demuestra que existe $x^* \in [x_1, x_2]$ tal que $P(x^*) = x^*$.

3. Deduce que la solución $x(t, x^*)$ es una función T–periódica.

3.- Dado $\epsilon > 0$, sea $x(t; \epsilon)$ la solución maximal del PVI

$$\varepsilon x' = x^2 + (1 - \varepsilon)t,\ x(0) = 1\,.$$

1. Prueba que para todo $T > 0$ y todo $s \in (0, 1)$ se verifica

$$\lim_{\epsilon \to 1} x_\epsilon(t) = \frac{1}{1-t}$$

uniformemente en $[-T, s]$.

2. Calcula $\frac{\partial x}{\partial \epsilon}(t; 1)$.

3. ¿ Se puede aplicar el teorema de diferenciabilidad respecto de parámetros para calcular $\frac{\partial x}{\partial \epsilon}(t; 0)$?.

4.- Para cada $\epsilon \in I\!R$, sea $x(t; \epsilon)$ la solución del PVI $x' = (1+\epsilon)x - \epsilon x^2 - 1$ con $x(0) = 2$. Se pide:

1. Demuestra que si $\epsilon \in [0, \frac{1}{2}]$, entonces $x(t; \epsilon)$ está definida en $I\!R$.

2. Prueba que $\forall T > 0$, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que si $-\epsilon_0 < \epsilon < 0$ entonces $x(t; \epsilon)$ está definida en $[0, T]$.

3. Calcula $(\partial x/\partial \epsilon)(t, 0)$.

(segundo parcial, curso 1994/95)

Estabilidad

5.- Se considera el sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 + \varepsilon(x_1^2 + x_2^2)x_1 \\ x_2' &= -x_1 + \varepsilon(x_1^2 + x_2^2)x_2. \end{aligned}$$

Pasando a coordenadas polares, estudia las propiedades de estabilidad del origen según los valores de ε.

6.- Se considera la ecuación escalar autónoma

$$x' = -(x - p_1)(x - p_2) \cdots (x - p_n),$$

donde $p_1, p_2, \ldots, p_n \in I\!R$ con $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ y n es impar. Denotemos por $x(t; x_0)$ a la solución de la ecuación que satisface la condición inicial $x(0) = x_0$.

1. Demuestra que, para todo $x_0 \in I\!R$, $x(t; x_0)$ es prolongable hasta $+\infty$.

2. Demuestra que $\lim_{t \to +\infty}$ existe y es finito para todo $x_0 \in I\!R$.

3. Estudia las propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio.

4. Esboza la gráfica de las soluciones. (Febrero 1989)

7.- Se considera la ecuación

$$x'' + g(x) = 0$$

donde $g : I\!R \to I\!R$ es Lipschitz–continua. Sea $p \in I\!R$ un punto de equilibrio aislado tal que la función $G(x) = \int_0^x g(z)\,dz$ alcanza en p un máximo local estricto. Prueba que p es un punto de equilibrio inestable.

8.- Encuentra dos funciones continuas $a(t)$ y $b(t)$ tales que la ecuación lineal escalar $x' = a(t)x$ sea asintóticamente estable, $x' = [a(t) + b(t)]x$ sea inestable y además

$$\lim_{t\to+\infty} b(t) = 0.$$

9.- Se considera la función $f : I\!R \to I\!R$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} 2z+4 & \text{si } z < -1, \\ -2z & \text{si } |z| < 1, \\ 2z-4 & \text{si } z > 1. \end{cases}$$

Se considera la ecuación

$$x'' + f(x') + x = 0\,.$$

1. Estudia la existencia, unicidad y prolongación de sus soluciones.

2. Estudia las propiedades de estabilidad de sus puntos de equilibrio.

10.- Estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio en las siguientes ecuaciones y sistemas:

1. $x'' - 2xe^{-x^2} = 0$.

2. $x'' + 2x' + 5x + x^3 = 0$.

3. $x' = y + x - x^3$, $y' = -x$.

4. $x'' + x|x| = 0$.

5. $x' = f(x+y)$, $y' = -f(x-y)$, donde $f(z) = \begin{cases} 2z & \text{si } z \geq 0, \\ 3z^2 + 2z & \text{si } z < 0. \end{cases}$

11.- Se considera el sistema

$$\begin{aligned} x' &= -6y^5 e^{x+y}, \\ y' &= 2(x-1)e^{x+y}. \end{aligned}$$

Prueba que el sistema tiene un único punto de equilibrio y que dicho punto es estable pero no es un atractor.

12.- Sea p un punto de equilibrio de la ecuación

$$x' = f(x)\,, \quad f \in C^1(I\!R^N; I\!R^N)$$

y supongamos que todas las soluciones son prolongables hasta $+\infty$. Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. Si la ecuación variacional $y' = f'(p)y$ es inestable, entonces p es un punto de equilibrio inestable.

2. Si p es un atractor, entonces el conjunto $A = \{q \in I\!R^N \, : \, \lim_{t\to+\infty} x(t;q) = p\}$ es abierto.

3. Si la matriz $f'(p)$ es definida positiva, entonces el conjunto $B = \{q \in I\!R^N \setminus \{p\} \, : \, \lim_{t\to+\infty} x(t;q) = p\}$ es vacío.

13.- Calcula los puntos de equilibrio de la ecuación

$$x'' + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0.$$

¿Son estables?, ¿son asintóticamente estables?.

14.- Da ejemplos explícitos de ecuaciones autónomas

$$x' = f(x), \quad f \in C^1(I\!R^N, I\!R^N)$$

que verifiquen las siguientes propiedades:

1. Tiene exactamente dos puntos de equilibrio, ambos inestables.

2. Tiene exactamente un punto de equilibrio que es estable pero no es asintóticamente estable.

3. Tiene una infinidad de puntos de equilibrio y todos ellos son inestables.

(Febrero 1990)

Asimismo, da ejemplos explícitos de ecuaciones diferenciales que verifiquen las siguientes propiedades:

1. Tiene una solución asintóticamente estable, pero el primer método de Lyapunov no proporciona información.

2. Todas las soluciones están definidas y acotadas en $[0, +\infty)$ y al menos una de ellas es inestable.

3. Tiene una solución estable y otra inestable.

(Junio 1991)

15.- Se considera el siguiente sistema de ecuaciones presa–depredador de Lotka–Volterra

$$\begin{cases} x' = (a - by)x \\ y' = (-c + dx)y \,, \end{cases}$$

donde a, b, c y d son constantes positivas. Se trata de estudiar las propiedades de estabilidad del punto de equilibrio $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ a través de los siguientes pasos:

1. Utiliza el cambio de variables $p = \ln x$, $q = \ln y$ para transformar la ecuación de Lotka–Volterra en un sistema de la forma

$$\begin{cases} p' = -\frac{\partial H}{\partial q}(p,q) \\ q' = \frac{\partial H}{\partial p}(p,q), \end{cases}$$

   donde $H \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ (este tipo de sistemas se llaman *Hamiltonianos*). Determina la función H.

2. Se define $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ como $V(x,y) := H(\ln x, \ln y)$. Comprueba que V alcanza en $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ un mínimo estricto.

3. Como consecuencia del apartado anterior, determina las propiedades de estabilidad del punto de equilibrio $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$.

(Septiembre 1992)

16.- Se pide:

1. Demostrar que, dado $\lambda > 0$, la ecuación $\lambda x + e^x = 0$ tiene una única raíz real a la que denotaremos por x_λ.

2. Probar que la función

$$V(x,y) = \frac{\lambda}{2}x^2 + e^x + \frac{1}{2}y^2$$

   alcanza su mínimo absoluto en el punto $(x_\lambda, 0)$.

3. Estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio de la ecuación diferencial

$$x'' + \lambda x + e^x = 0, \quad \lambda > 0.$$

(Diciembre 1996)