ECUACIONES DIFERENCIALES II
Curso 12-13

Relación de ejercicios 6: **Análisis global de existencia y unicidad de soluciones**

1. (a) Demuestra el siguiente principio de comparación de soluciones:
   Sean D un dominio y $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y localmente lipschitziana en x. Sean φ_1 y φ_2 dos soluciones de la ecuación

   $$x' = f(t,x)$$

   definidas en un intervalo abierto I y sea $t_0 \in I$. Si $\varphi_1(t_0) < \varphi_2(t_0)$, entonces $\varphi_1(t) < \varphi_2(t)\ \forall\, t \in I$.

   (b) Si en el apartado anterior se sustituye la ecuación $x' = f(t,x)$ por $x'' = f(t,x)$, ¿se sigue cumpliendo el principio de comparación?

   (c) Prueba que el P.V.I.

   $$x' = x^2 + x - 2\,, \quad x(0) = 0\,,$$

   tiene una única solución definida en $(-\infty, +\infty)$ y que dicha solución admite límites en $-\infty$ y en $+\infty$. Calcula dichos límites.

2. Prueba el siguiente principio de comparación de soluciones de distintas ecuaciones diferenciales:

   Sea D un dominio de $\mathbb{R}^2$ y sean $F_1, F_2 : D \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que

   $$F_1(t,x) < F_2(t,x) \quad \forall\,(t,x) \in D\,.$$

   Sean φ_1 y φ_2 soluciones de $x' = F_1(t,x)$ y $x' = F_2(t,x)$, respectivamente, definidas en un intervalo abierto I. Sea finalmente $t_0 \in I$. Entonces, si $\varphi_1(t_0) < \varphi_2(t_0)$ se tiene que

   $$\varphi_1(t) < \varphi_2(t) \quad \forall\, t \geq t_0, \quad t \in I\,.$$

3. Se considera la ecuación $x' = f(x)$ donde

   $$f(x) = \begin{cases} -4 - x, & x \leq -1 \\ x(4 - x^2), & -1 < x < 1 \\ 4 - x, & x \geq 1. \end{cases}$$

   Se pide:

   (a) Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, demuestra que existe una única solución de la ecuación que cumple $x(0) = x_0$. Denotemos por $x(t;x_0)$ a dicha solución.

   (b) Demuestra que $x(t;x_0)$ está definida en $(-\infty, +\infty)$ para cada $x_0 \in \mathbb{R}$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ una función continua y globalmente lipschitziana con respecto a x:

   a) Demuestra que la solución $x(t;y)$ de

   $$x' = f(t,x)\,, \quad x(0) = y\,,$$

   está definida en $\mathbb{R}$.

b) Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ fijo. Definimos $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de la siguiente forma:

$$P(y) = x(t_0; y)\,.$$

Demuestra que P es biyectiva.

5. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

   (a) ¿Admite el P.V.I.
   $$x' = \operatorname{sen}(tx)\,, \quad x(t_0) = x_0 > 0\,, \quad t_0 \in \mathbb{R}\,,$$
   una solución definida en $\mathbb{R}$ que sea positiva? La solución que pasa por $(1,1)$, ¿puede pasar por $(2,3)$? Prueba que la solución que pasa por $(0,2)$ tiene un mínimo local en $t = 0$.

   (b) ¿Puede ser $x(t) = t^2$ una solución en $(0,1)$ de la ecuación $x' = f(t,x)$ si
   $$|f(t,x)| < 1\,, \quad t, x \in (0,1)\,?\,.$$

6. Se considera el P.V.I.
$$x' = \frac{1}{t^2 + x^2}\,, \quad x(0) = x_0 \geq 1\,.$$

   Se pide:

   (a) Prueba que existe una única solución, $x(t)$, definida en $(-\infty, +\infty)$.

   (b) Demuestra que existen $\lim_{t\to+\infty} x(t)$ y $\lim_{t\to-\infty} x(t)$.

   (c) Encuentra acotaciones para dichos límites.

7. Se considera la ecuación $x' = \operatorname{sen}(x^2)$. Estudia la existencia, unicidad y prolongabilidad del correspondiente P.V.I. y demuestra que todas las soluciones de esta ecuación son acotadas.

8. La solución de
$$\begin{cases} x' = y^2, & x(0) = 1, \\ y' = \operatorname{sen}(x), & y(0) = 1, \end{cases}$$
   ¿está definida en $\mathbb{R}$?

9. ¿Existe una única solución del P.V.I.
$$x' = \max\{t, x\}\,, \quad x(0) = 0\,,$$
   definida en $(-\infty, +\infty)$?

10. Decide si cada uno de los siguientes P.V.I.s tiene su solución definida en el intervalo que se indica:

    (a) $x' = e^x$, $x(0) = 1$ en $[0, +\infty)$.

    (b) $x' = \log(x)$, $x(1) = \pi$ en $[1, +\infty)$.

    (c) $x''' + \operatorname{sen}(t)x - \log(t) = 1$, $x(1) = x'(1) = x''(1) = 7$ en $(0, +\infty)$.

11. Demuestra que el intervalo maximal de definición de la solución $x(t) = \sqrt{1-t}$ del P.V.I.
$$x' = \frac{x}{2t-2}\,, \quad x(0) = 1\,,$$
    es $(-\infty, 1)$ y $\lim_{t\to1^-} x(y) = 0$. ¿Hay contradicción con los resultados de prolongación demostrados?

12. (a) Prueba que toda solución de la ecuación del péndulo con rozamiento

$$mx'' + bx' + \frac{mg}{l}\,\mathrm{sen}(x) = 0$$

está definida en $\mathbb{R}$.

(b) Prueba que la solución del P.V.I.

$$x'' + \mu\,(x^2 - 1)x' + x = 0\,, \quad x(0) = x_0\,, \quad x'(0) = v_0\,,$$

con $\mu > 0$, está definida en $[0, +\infty)$.