# ECUACIONES DIFERENCIALES II
## Curso 12-13

Relación de ejercicios 5: **Análisis local de existencia y unicidad de soluciones**

**1.-** Se considera la sucesión de funciones

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R} \quad f_n(x) = \operatorname{sen}(nx)\,.$$

Decide razonadamente si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(i) La sucesión es uniformemente acotada.

(ii) La sucesión es equicontinua.

(iii) Existe una sucesión parcial de $\{f_n\}$ que converge uniformemente en $[0,1]$.

**2.-** Demuestra que la sucesión de funciones $f_n(t) = \frac{\operatorname{sen}(nt)}{\sqrt{n}}$ converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}$. ¿Qué se puede decir acerca de la convergencia de $f_n'(t)$?.

**3.-** Sean $I$ un intervalo compacto y $f_n \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ una sucesión de funciones tal que $\{f_n'\}$ es uniformemente acotada. Demuestra que $\{f_n\}$ es equicontinua.

**4.-** Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones uniformemente acotada, equicontinua y tal que

$$\lim_{|t|\to\infty} f_n(t) = 0 \quad \text{uniformemente en } n\,.$$

Prueba que existe una sucesión parcial de $\{f_n\}$ que converge uniformemente en $\mathbb{R}$ hacia una función $f \in C(\mathbb{R})$.

**5.-** Se considera la sucesión de funciones

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f_n(t) = \begin{cases} 0\,, & t \le n\,, \\ t-n\,, & n < t < n+1\,, \\ 1, & t \ge n+1\,. \end{cases}$$

Prueba que es uniformemente acotada y equicontinua y que converge puntualmente hacia $f \equiv 0$ pero no lo hace uniformemente.

**6.-** Se considera la ecuación diferencial

$$x'' - t^2 x = 0\,.$$

¿Para qué valores de $\epsilon$ la función $z(t) = e^{\frac{t^4}{12}}$ es una solución $\epsilon$–aproximada de la ecuación en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$?

**7.-** Se considera el P.V.I.

$$(P) \begin{cases} x' = F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

donde $F : \Omega \to \mathbb{R}^N$ es continua, $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ es abierto y $(t_0, x_0) \in \Omega$. Sean $a, b > 0$ y $|\cdot|$ una norma vectorial en $\mathbb{R}^N$ tales que el conjunto

$$\mathcal{R} = \Big\{(t,x) \in \mathbb{R}^{N+1} : |t - t_0| \leq a,\ |x - x_0| \leq b\Big\}$$

satisface que $\mathcal{R} \subset \Omega$. Sea también $M \geq 0$ tal que

$$|F(t,x)| \leq M \qquad \forall\ (t,x) \in \mathcal{R}\,.$$

Fijado $\alpha \leq \min\{a,\ b/M\}$, definimos la siguiente sucesión (llamada sucesión de **iterantes de Picard**):

$$\begin{array}{l} \phi_0(t) = x_0\,, \\ \phi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \phi_k(s))\, ds, \quad k \in \mathbb{N}\,, \end{array}$$

para cada $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

1. Prueba que $\phi_k(t)$ está bien definida y es continua en $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
2. Prueba que si la función $F$ es localmente lipschitziana respecto de la variable $x$, entonces la sucesión de iterantes de Picard converge uniformemente hacia la solución de $(P)$.

**8.-** Escribe los primeros términos del esquema de iteración de Picard para cada uno de los siguientes P.V.I. y, cuando sea posible, encuentra explícitamente la solución:

(i) $x' = x + 2,\ \ x(0) = 2$.

(ii) $x' = x^{4/3},\ \ x(0) = 0$.

(iii) $x' = x^{4/3},\ \ x(0) = 1$.

(iv) $x' = \text{sen} x,\ \ x(0) = 0$.

(v) $x' = x/2,\ \ x(1) = 1$.

**9.- (Ejemplo de Müler)** Se considera el P.V.I.

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(0) = 0 \end{array} \right.$$

donde $f : (-\infty, 1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función

$$f(t,x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } t \leq 0 \text{ y } x \in \mathbb{R}\,, \\ 2t & \text{si } 0 < t < 1 \text{ y } x < 0\,, \\ 2t - \frac{4x}{t} & \text{si } 0 < t < 1 \text{ y } 0 \leq x \leq t^2\,, \\ -2t & \text{si } 0 < t < 1 \text{ y } t^2 < x\,. \end{array} \right.$$

(i) Prueba que $(P)$ tiene una única solución.

(ii) Calcula la sucesión de iterantes de Picard. ¿Es convergente?.

**10.-** Sean $f : I\!\!R \to I\!\!R$ una función lipschitziana y $g : I\!\!R \to I\!\!R$ una función continua. Prueba que la ecuación

$$x' = f(x)\,, \quad y' = g(x)y$$

tiene una única solución para unas condiciones iniciales dadas. Calcula la solución en el siguiente caso particular:

$$\begin{cases} x' = 2|x|\,, y' = y\sqrt{|x|} \\ x(0) = 1\,, y(0) = 3\,. \end{cases}$$

**11.-** Estudia la existencia y unicidad de solución de los siguientes PVI:

(i) $x' = |x| + (2 - x^2 - t^2)\,, \ \ x(t_0) = x_0\,.$

(ii) $x' = g(x) + \frac{1}{t-2}\,, \ \ x(t_0) = x_0$ , donde $g(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x < 0\,. \end{cases}$

**12.-** Para las siguientes funciones, halla una constante de Lipschitz en la región indicada o bien demuestra que no existe:

(i) $f(x) = |x|\,, \quad x \in ]-\infty, +\infty[.$

(ii) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}\,, \quad x \in [-1, 1].$

(iii) $f(x) = \frac{1}{x}\,, \quad x \in [1, +\infty[.$

(iv) $f(x, y) = (x + 2y, -y)\,, \quad (x, y) \in I\!\!R^2.$

(v) $f(x, y) = \frac{xy}{1+x+y}\,, \quad x^2 + y^2 < \frac{1}{2}.$

(vi) $f(x) = x \ln |x|\,, \quad x \neq 0\,, f(0) = 0\, x \in [-1, 1].$

**13.-** Se dice que una función continua $f : I\!\!R \to I\!\!R$ es **lineal a trozos** si existen

$$-\infty = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k = +\infty$$

tales que $f$ es lineal en cada intervalo $]x_i, x_{i+1}[$, $i = 0, 1, 2, \cdots, k$; es decir,

$$f(x) = a_i x + b_i \quad x \in ]x_i, x_{i+1}[\,, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, k, \quad a_i, b_i \in I\!\!R\,.$$

Prueba que las funciones lineales a trozos son globalmente lipschitzianas.

**14.-** Sea $X = C([-1, 1]; I\!\!R)$ y consideremos la aplicación $T : X \to X$ definida por

$$Tx(t) = \frac{1}{2}(x^2(t) + 1 - t^2)\,.$$

(i) Demuestra que $T$ tiene un único punto fijo $z(t)$ con $0 \leq z(t) \leq 1 \ \forall\, t \in [-1, 1]$ y encuéntralo.

(ii) Demuestra que si se toma $x_0(t) = 1$ y se define $x_{k+1} = Tx_k, \ \ k \in I\!\!N$, entonces $\{x_k\}$ converge uniformemente hacia $z$.

**15.-** Demuestra que existe una función continua en $[0,1]$ tal que

$$f(t) = \frac{1}{3} \int_0^t s^2 \operatorname{sen}(f(s))\, ds \quad \forall\, t \in [0,1]\,.$$

¿Es única?.

**16.-** Prueba que existe una única función continua en $[0,1]$ que cumple

$$x(t) = \operatorname{sen}(t) + \int_0^t \frac{x(s)}{\sqrt{s}}\, ds \quad \forall\, t \in [0,1]\,.$$

**17.-** Demuestra el Teorema de Cauchy–Picard–Lindelof usando un argumento de punto fijo.