# Práctica 8

# Límite, continuidad y derivabilidad

## Límite de una función

Definamos la siguiente función:

```
f[x_] := 1/(1 - x^2)
```

Está definida en todo $\mathbb{R}$ excepto $x = \pm 1$.

*Mathematica* dispone de una orden para calcular el límite de una función en un punto, y los correspondientes límites laterales.
La primera es

**Limit**[*función*, *variable*→*punto*]

En nuestro caso, el límite cuando $x$ tiende a 2, por ejemplo, se tdeermina como sigue:

```
Limit[f[x], x -> 2]
```

La existencia de este límite garantiza la existencia de los límites laterales correspondientes, que coinciden con el valor del límite. En la orden **Limit** puede utilizarse la opción *Direction*→1 para hallar el límite por la izquierda y Direction→ -1 para el límite por la derecha.

```
Limit[f[x], x -> 2, Direction -> 1]
```

```
Limit[f[x], x -> 2, Direction -> -1]
```

Podemos trabajar en el punto $x = 1$.

```
Limit[f[x], x -> 1]
```

Observemos la salida obtenida.

Podemos calcular los límites laterales.

```
Limit[f[x], x -> 1, Direction -> 1]
```

```
Limit[f[x], x -> 1, Direction -> -1]
```

Representemos la gráfica de la función en un entorno alrededor del punto $x = 1$.

```
Plot[f[x], {x, 0.9, 1.1}, PlotRange -> {-100, 100}];
```

Observemos que el límite por la izquierda es $\infty$ y $-\infty$ por la derecha. En sentido estricto, no debería asignarse ningún signo al infinito en el punto 1, aunque *Mathematica* lo asigna.

En $x = -1$ podemos actuar de igual modo.

```
Limit[f[x], x -> -1]

Limit[f[x], x -> -1, Direction -> 1]

Limit[f[x], x -> -1, Direction -> -1]

Plot[f[x], {x, -1.1, -0.9}, PlotRange -> {-100, 100}];
```

El límite por la izquierda en $x = -1$ es $-\infty$ y $\infty$ por la derecha.

La misma orden puede emplearse para calcular el límite en $\infty$ (o en $-\infty$)

```
Limit[f[x], x -> ∞]

Limit[f[x], x -> -∞]
```

La gráfica de la función que estamos considerando es asintótica a la recta de ecuación $x = 0$ en $\pm\infty$.

Ilustramos la situación representando gráficamente la función en un intervalo centrado en el origen.

```
Plot[f[x], {x, -2, 2}];
```

Definamos una nueva función.

```
g[x_] := Which[-π ≤ x ≤ 0, Sin[x], 0 < x ≤ π, 1 - x, True, (x/2)^2]
```

Los únicos puntos en los que hay que determinar la existencia de límite son $-\pi$ , 0, y $\pi$.

Usemos la orden **Limit**.

```
Limit[g[x], x -> -π, Direction -> 1]
```

No obtenemos ningún resultado. La orden **Limit** no se puede usar con funciones definidas con la orden **Which**. Para trabajar podemos definir cuatro funciones diferentes a partir de las diferentes expresiones que intervienen en la definición de g, asociadas a la partición $(-\infty, -\pi) \cup [-\pi, 0] \cup (0, \pi] \cup (\pi, +\infty)$.

```
g1[x_] := (x/2)^2
g2[x_] := Sin[x]
g3[x_] := 1 - x
g4[x_] := (x/2)^2

Limit[g1[x], x -> -π, Direction -> 1]

-Limit[g2[x], x -> -π, Direction -> 1]
```

Los límites laterales en $x = -\pi$ existen pero son diferentes, luego no hay límite en $x = -\pi$.

```
Limit[g2[x], x -> 0, Direction -> 1]
Limit[g3[x], x -> 0, Direction -> -1]
```

Lo mismo sucede en $x = 0$.

```
Limit[g3[x], x -> π, Direction -> 1]
Limit[g4[x], x -> π, Direction -> -1]
```

Y en $x = \pi$ tampoco hay límite, aunque existen los límites larterales.

Podemos ilustrar gráficamente la situación representando por separado estas cuatro funciones y representándolas conjuntamente.

```
graf1 = Plot[g1[x], {x, -2 π, -π},
   PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0]}, DisplayFunction -> Identity];
graf2 = Plot[g2[x], {x, -π, 0}, PlotStyle -> {RGBColor[0, 1, 0]},
   DisplayFunction -> Identity];
graf3 = Plot[g3[x], {x, 0, π}, PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1]},
   DisplayFunction -> Identity];
graf4 = Plot[g4[x], {x, π, 2 π}, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0]},
   DisplayFunction -> Identity];
Show[{graf1, graf2, graf3, graf4}, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

Podríamos haber representado graficamente la función **g**.

```
Plot[g[x], {x, -2 π, 2 π}];
```

La diferencia estriba en que la orden de representación gráfica produce segmentos verticales en la gráfica de la función (que no pertenecen en realidad a la gráfica de la función).

```
Plot[g[x], {x, -2 π, 2 π}, Axes -> None];
```

## Continuidad de una función

Estudiemos la continuidad de la función

$$f(x) = \frac{x+a}{1+\mathrm{Exp}[1/x]} \text{ si } x < 0$$
$$f(0) = 1$$
$$f(x) = \sqrt{b + x^2} \quad \text{si } x > 0$$

donde $a \in \mathbb{R}$ y $b > 0$.

Es claro que sólo es necesario estudiar la continuidad en $x = 0$. Además, la función $f$ será continua si y sólo si está definida en 0, existe límite en 0 y dicho límite coincide con $f(0)$.

La función está definida en 0, y su valor es igual a 1.

Comenzamos definiendo la función de modo que su límite pueda ser calculado con *Mathematica*.

```
f1[x_] := (x + a)/(1 + Exp[1/x])
f2[x_] := Sqrt[b + x^2]
```

Como

```
Limit[f1[x], x -> 0, Direction -> 1]
```

y

```
Limit[f2[x], x -> 0, Direction -> -1]
```

se tiene que los límites laterales existen, y coincidirán si y sólo si $a = \sqrt{b}$. En este caso, la función tiene límite si y sólo si $a = \sqrt{b}$.

La función será continua si y sólo si $a = \sqrt{b} = f(0) = 1$.

En definitiva, la función es continua si y sólo si $a = b = 1$.

Representemos la función cuando se cumple esta condición.

```
f[x_] := Which[x ≤ 0, (x + 1)/(1 + Exp[1/x]), x > 0, Sqrt[1 + x^2]]
Plot[f[x], {x, -4, 2}];
```

## Derivabilidad de una función

Una función es derivable en $x = a$ si existe

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

en cuyo caso el límite se llama derivada de $f$ en $a$, y se nota $f'(a)$.

Utilicemos la definición para estudiar la derivabilidad de las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^x$.

```
f[x_] := Sqrt[x]
Limit[(f[x] - f[a])/(x - a), x -> a]
```

La función $f(x)$ es derivable en $a$.

```
g[x_] := x^x
Limit[(g[x] - g[a])/(x - a), x -> a]
```

Obsérvese que $g(x)$ es derivable en $a > 0$.

*Mathematica* puede calcular la derivada formal de una función. Si es **f[x]**, la derivada se calcula con la orden **f'[x]** o **D[f[x],x]**. En los casos anteriores,

```
f'[x]
```

```
g'[x]
```

En este último caso, es necesario simplificar:

```
Simplify[%]
```

Consideremos la función definida por

$$h(x) = c^2 x^2 + x + a\, e^x \quad \text{si } x \le 0$$
$$h(x) = x^3 + a\, x^2 + c\, e^{-x} \text{ si } x > 0$$

Para que sea derivable es necesario que sea continua.

```
h1[x_] := c^2 x^2 + x + a Exp[x]
h2[x_] := x^3 + a x^2 + c Exp[-x]
```

Como

```
Limit[h1[x], x -> 0, Direction -> 1]
```

y

```
Limit[h2[x], x -> 0, Direction -> -1]
```

para que haya límite debemos imponer la igualdad:

Se tiene automáticamente la continuidad.

```
Limit[(h1[x] - h1[0])/(x - 0), x -> 0, Direction -> 1]
```

```
Limit[(h2[x] - h2[0])/(x - 0), x -> 0, Direction -> -1]
```

La función será derivable si y sólo si se cumple que $a = c$ y $1 + a = -c$. La solución de este sistema es $a = c = -\frac{1}{2}$.

Para estos valores, podemos representar la función. Por ejemplo, utilizamos la orden **Which** para definirla.

```
a = c = -1/2;
```

```
h[x_] := Which[x ≤ 0, c^2 x^2 + x + a Exp[x], x > 0, x^3 + a x^2 + c Exp[-x]]
```

```
Plot[h[x], {x, -6, 2}];
```

La orden **Which** no permite trabajar con **Limit**, pero sí con la derivada (una vez probado que la función es derivable). En el caso anterior, es muy simple representar la derivada de la función $h$.

```
Plot[h'[x], {x, -6, 2}];
```

También se puede "preguntar" por la derivada en un punto.

```
h'[0]
```

## Ejercicios

1.- Calcule los límites de las funciones definidas por las siguientes expresiones, en los valores que se indican:

a) (x^2-4) / (x-2), x->2,

b) ((t+h)^2-t^2) / h, h->0,

2.- Calcule y simplifique las derivadas de las siguientes funciones:

i) f(x) = Ln((x^2+x+1)^(1/2) - 1/Sqrt[3]) arctg((2x+1) / Sqrt[3])

ii) f(x) = ((cos x)^x)^tg x