Práctica de
Aplicaciones Lineales

Aplicaciones lineales y matrices

Las matrices también desempeñan un papel muy destacado en el estudio de las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales finito-dimensionales. Concretamente, fijadas bases en ellos, la aplicación lineal considerada queda representada por una matriz de orden $m \times n$, donde m es la dimensión del espacio vectorial inicial y n la del final.

■ Ejemplo 1

Supongamos que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ es la aplicación lineal definida por

$$f(x,y,z)=(x-y\ ,\ x-z\ ,\ 0,\ x).$$

```
f[{x_, y_, z_}] := {x - y, x - z, 0, x}
```

Se puede ya, calcular la imagen de cualquier vector de $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo sea el vector de coordenadas en la base canónica (1, -1, 1), su imagen se calcularía

```
f[{1, -1, 1}]
```

En $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ consideramos las bases canónicas, es decir

```
A1 = IdentityMatrix[3];
A2 = IdentityMatrix[4];
```

¿Cuál es la matriz de f respecto e estas bases?. Se halla calculando los transformados mediante f de los vectores de **A1** respecto de **A2**.
Las listas resultantes serán las columnas de la matriz.

```
matrizf = {};
For[i = 1, i <= 3, i++,
   AppendTo[matrizf, f[A1[[i]]]]
  ]
matrizf = Transpose[matrizf];
matrizf // MatrixForm
```

A partir de la matriz de f respecto de las bases especificadas, la imagen un vector se calcula fácilmente. Por ejemplo, la imagen del vector que respecto de **A1** tiene coordenadas (1, -1, 1) es

```
matrizf.{1, -1, 1}
```

Como se puede observar el vector imagen del (1, -1, 1) aplicando la expresión de f es igual al vector imagen haciendo uso de la matriz de la aplicación.

Ejemplo 2

Otra forma de especificar una aplicación lineal es proporcionar los transformados de los vectores de una base del espacio inicial. Supongamos, por ejemplo, que la aplicación lineal $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ está definida por

$$g(1, 2, 3, 4) = (1, 2), \quad g(2, 1, 3, 4) = (1, 3), \quad g(1, 0, 0, 1) = (2, 1), \quad g(0, 0, 0, 1) = (1, 0)$$

El conjunto **B1** = {(1, 2, 3, 4), (2, 1, 3, 4), (1, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1)} es base de $\mathbb{R}^4$ pues da lugar a una matriz de determinante no nulo:

```
Det[{{1, 2, 3, 4}, {2, 1, 3, 4}, {1, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 1}}]
```

Consideremos, pues, las siguientes bases de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente:

```
B1 = {{1, 2, 3, 4}, {2, 1, 3, 4}, {1, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 1}};
B2 = {{1, 0}, {0, 1}};
```

¿cuál es la matriz de la aplicación g considerando la base B1 en el espacio inicial $\mathbb{R}^4$ *y* la base B2 (la base canónica) en el espacio final $\mathbb{R}^2$

Recordando lo realizado al comienzo de la práctica, la matriz de g respecto de las bases **B1** y **B2** es

```
Ag = Transpose[{{1, 2}, {1, 3}, {2, 1}, {1, 0}}];
MatrixForm[Ag]
```

¿Cómo se hallaría la imagen del vector que respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ se escribe (1, -2, 3, -4)?

El problema estriba en que no se puede usar directamente la matriz calculada, pues para ello habría que utilizar la lista de coordenadas respecto de **B1** del vector cuya imagen se pide. Se puede resolver fácilmente efectuando un cambio de base en espacio inicial, para lo que vamos a considerar la rutina que creamos en la práctica dedicada al cambio de base en espacios vectoriales. (También será útil a la hora de resolver los problemas propuestos).

$$\mathbb{R}^4 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2$$

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{Ag} & B_2 \\ A_1^{-1} \uparrow & \nearrow & Ag.A_1^{-1} \\ B_c & & \end{array}$$

```
A1 = Transpose[B1]
```

Definimos la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

La matriz de cambio de base de **B1** a **Bc** es

Entonces, la matriz de *g* respecto de **Bc** y **B2** es

```
Cg = Ag.Inverse[A1];

Cg // MatrixForm
```

Ahora es muy fácil hallar el transformado de (1, -2, 3, -4). Es

```
Cg.{1, -2, 3, -4}
```

Núcleo e imagen de una aplicación lineal

Asociados al concepto de aplicación lineal tenemos los de núcleo de la aplicación , N(f) e imagen de f , Im(f). En esta sección mostraremos cómo usar las órdenes incorporadas a *Mathematica* para trabajar con ellos.

Supongamos que disponemos de la aplicación lineal $h: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que, respecto de bases fijadas en los espacios inicial y final, tiene la siguiente matriz asociada:

```
matrizh = {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, -1}, {0, -1, 1, 0}, {0, 0, 0, 0}};
matrizh // MatrixForm
```

Puesto que, según la **definición de núcleo de una aplicación** , está formado por los **vectores del espacio inicial que tienen como imagen el vector cero del espacio final.** Tomamos un vector **v** genérico de $\mathbb{R}^4$ y obligamos a que tenga como imagen el vector cero del espacio final, que vuelve a ser $\mathbb{R}^4$, por lo tanto,es (0,0,0,0).

```
v = {x, y, z, t};

Solve[matrizh.v == {0, 0, 0, 0}, {x, y, z, t}]
```

Lo que nos dice este resultado es que (x,y,z,t)=(0,t,t,t)= t (0,1,1,1) , luego el vector (0,1,1,1) genera N(f) y al ser distinto del vector cero es l.i., esto es, es base de N(f).

Una base del núcleo de la aplicación lineal h se puede obtener directamente con la orden NullSpace, de la siguiente manera:

```
BaseNucleo = NullSpace[matrizh]
```

El núcleo de h es, pues, un subespacio vectorial de dimensión uno. Podemos hallar sus ecuaciones paramétricas e implícitas:

```
param = {a};
coord = {x, y, z, t};
paramNucleo = LogicalExpand[coord == Transpose[BaseNucleo].param]
implicitasNucleo = Eliminate[paramNucleo, param]
```

Para hallar una base de la imagen de h, así como sus ecuaciones paramétricas e implícitas debemos recordar que un sistema de generadores está formado por los vectores
correspondientes a las columnas de la matriz de h, o, lo que es lo mismo, por las filas de la traspuesta de dicha matriz. Lo definimos, pues.

```
generadorImagen = Transpose[matrizh];
```

A partir de él hallamos una base con alguno de los procedimientos indicados en la primera práctica, por ejemplo, mediante la reducción por filas .

```
RowReduce[generadorImagen]
```

Una base es, por ejemplo,

```
BaseImagen = Table[%[[i]], {i, 3}]
```

Las ecuaciones correspondientes son

```
param = {a, b, c};
coord = {x, y, z, t};
paramImagen = LogicalExpand[coord == Transpose[BaseImagen].param]
implicitasImagen = Eliminate[paramImagen, param]
```

El subespacio imagen de h tiene dimensión tres y, por tanto, una única ecuación implícita.

Imagen de un subespacio vectorial por una aplicación lineal

Finalizamos esta práctica mostrando cómo hallar la imagen de un subespacio vectorial U del espacio inicial mediante una aplicación lineal.

Supongamos que $j: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ es la aplicación lineal que tiene, respecto de bases fijadas en los espacios vectoriales involucrados, la siguiente matriz asociada:

```
matrizj = {{1, 0, 0, 1, 0}, {1, -1, 0, 0, 1}, {1, -1, 0, 0, 0}};
```

Pretendemos hallar el subespacio V *de* $\mathbb{R}^3$ tal que, V=f(U) donde U es un subespacio de $\mathbb{R}^5$. ¿Cómo se calcula V? **V es el subespacio engendrado por las imágenes de los vectores de una base de U**. Si sabemos una base de U, la formación de V es inmediata, basta calcular la imagen de cada vector de la base. Así pues, si U nos lo dan por medio de un conjunto generador o una base, bastaría calcular la imagen de cada uno de los vectores. Si U viene dado por sus ecuaciones implícitas , entonces tenemos que encontrar una base de U. Veamos cómo hacerlo

```
implicitasU = {x + y - z == 0, y - z == 0, y + t == 0};
```

Para ello, definimos coordenadas.

```
coordU = {x, y, z, t, u};
```

Resolvemos en las variables x, y,z, t y u.

```
parametricasU = Solve[implicitasU, coordU]
```

Un vector genérico es

```
vectorU = coordU /. parametricasU[[1]]
```

Se aprecia que un sistema generador es

```
generadorU = {{0, 1, 1, -1, 0}, {0, 0, 0, 0, 1}};
```

Ya tenemos un conjunto generador de U, que además es base,un sistema generador del subespacio imagen se halla calculando la imagen de cada uno de los vectores del anterior conjunto.

```
generadorV = Table[matrizj.generadorU[[i]], {i, 2}]
```

Ss además quisiéramos las ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio imagen del dado a partir de sus ecuaciones implícitas se calculan como sigue:

```
coordV = {x, y, z};
paramV = {a, b};
parametricasV = LogicalExpand[coordV == Transpose[generadorV].paramV]
implicitasV = Eliminate[parametricasV, paramV]
```

Ejercicios

1.- Se considera la aplicación lineal f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y,z) = (x+y,\ y+3z)$$

a) Halle su matriz asociada respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

b) Halle las coordenadas de la imagen del vector de coordenadas (1,2,4) (se entiende todo con respecto a las bases canónicas).

c) Halle la matriz asociada a f respecto de la base B1={(1,1,1),(0,1,-1),(1,0,0)} del espacio inicial y la canónica del final.

d) Halle la matriz asociada a f respecto de la base canónica del espacio inicial y la base **B2** ={(1,2),(0,1)} del espacio final.

e) Halle su matriz asociada respecto de las bases canónicas **B1** y **B2**.

2.- Se considera el endomorfismo f :$\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que respecto de la base usual de $\mathbb{R}^4$tiene como matriz asociada

{(10,1,1,1), (1,2,1,1),(1,1,2,1),(1,1,1,19/28)}

a) Halle una base y las ecuaciones implícitas de su núcleo.

b) Halle una base y las ecuaciones implícitas de su imagen.

c) Determine si el vector (-3,-3, -2,-1) pertenece a la imagen de f.

3.- Sea

A={(1,1,1,2,7), (2,2,2,3,3),(3,3,7,1,0),(4,4,4,5,2)}.

Supongamos que A representa una aplicación entre dos espacios vectoriales de dimensión 5 y 4 respectivamente.

a) Halle una base del núcleo de dicha aplicación.

b) Escriba un vector, no nulo y distinto de los de la base del núcleo, que se transforme mediante la aplicación lineal en el cero del segundo espacio vectorial.

c) Calcule la imagen de (1,2,3,4,5).

4.- Se considera la aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$ definida por:

$$(40, 7, 4, 6) \to (1, 0, 1)$$
$$(6, 7, 40, 7) \to (1, 1, 1)$$
$$(5, 1, 4, 30) \to (0, 1, 0)$$
$$(1, 2, 2, 1) \to (1, -1, 1)$$

a) Calcule la matriz asociada a dicha aplicación lineal respecto de las bases usuales (bases canónicas de cada espacio).

b) Calcule una base del núcleo de la aplicación.

c) Calcule una base de la imagen de la aplicación.

d) ¿Es el vector (7, 0, 3) un vector de la imagen ?