UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
ECUACIONES DIFERENCIALES
10 de septiembre de 2012

El número entre corchetes es la puntuación máxima de cada ejercicio.

[??] Ejercicio 1.-

1. Calcula la matriz fundamental principal en 0 del sistema
$$x' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x. \qquad (1)$$
2. Estudia la acotación o convergencia del sistema anterior. ¿Tiene (1) alguna solución no trivial que converja a cero en infinito?
3. ¿Qué se puede afirmar sobre el comportamiento asintótico de las soluciones del sistema
$$x' = \begin{pmatrix} -1 & \frac{t^2+1}{t^2} & e^{-t}-1 \\ 0 & \frac{1-t^2}{t^2+1} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{t^2+1} \end{pmatrix} x?$$

[??] Ejercicio 2.- Sea $x(t;x_0)$ la única solución del p.v.i.
$$x' = t\,x^2(1-x), \;\; x(0)=x_0.$$

(a) Comprueba que para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$ y $x_0 \neq 1$, $x(t;x_0)$ tiene un único extremo local en $t=0$ y determina, si es posible, si se trata de un máximo o un mínimo local. ¿Es global?

(b) Demuestra que $x(t;x_0)$ está definida en todo $\mathbb{R}$ cualquiera que sea x_0.

(c) Estudia si existen $\lim_{t\to\pm\infty} x(t;x_0)$ y en caso afirmativo, calcúlalos.

(d) Esboza la gráfica de $x(t;x_0),\; x_0 \in \mathbb{R}$.

[??] Ejercicio 3.- Determina los valores propios y las funciones propias del problema de Sturm-Liouville regular
$$\begin{cases} 4tx'' + 2x' + \lambda x = 0, \\ x(1) = x'(4) = 0. \end{cases}$$
Sugerencia: el cambio de variable $t = s^2$ trasforma la ecuación en una de coeficientes connstantes.

[??] Ejercicio 4.- Estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema autónomo
$$\begin{cases} x' = 2x^3 - 2xy^3, \\ y' = -5x^2y^2 - 4y^3. \end{cases}$$
Sugerencia: Busca $V(x,y) = ax^2 + by^2$ con a y b constantes apropiadas.

[??] Ejercicio 5.- Determina para qué valores de a la función
$$f(x) = \begin{cases} x^a, & |x|<1,\; x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$
tiene derivada débil.