UNIVERSIDAD DE GRANADA
Ecuaciones Diferenciales
Segundo examen parcial. 20 de junio de 2012.

[24] **EJERCICIO 1.** Se considera la ecuación diferencial no autónoma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -t^2x^3 + ty \\ -tx - t^4y \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Se pide:

(a) Comprueba que para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, existe una única solución maximal de (1) cumpliendo $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, definida para todo $t \geq t_0$.

Sugerencia: Demuestra que la función $N(x,y) := x^2 + y^2$ decrece a lo largo de las soluciones de (1).

(b) Demuestra que la solución constante $(x(t), y(t)) = (0,0)$ de la ecuación (1) es estable.

[21] **EJERCICIO 2.**

(a) Calcula los valores propios y las funciones propias del problema de contorno

$$\begin{cases} y'' + 2y' + \lambda y = 0, \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

(b) Determina el número de soluciones del problema de contorno

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = e^{-3x} \operatorname{sen} x \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases}$$

(c) Da una caracterización variacional del tercer valor propio y de la tercera función propia del problema (2).

[15] **EJERCICIO 3.** Justifica de forma rigurosa si existe la $\frac{\partial}{\partial \epsilon} x(t;0)$, siendo $x(t;\epsilon)$ la solución maximal del p.v.i.

$$x' = \epsilon x^2 + x, \qquad x(\epsilon) = 1.$$

En caso afirmativo, calcúlala.

[24] **EJERCICIO 4.** Se considera el problema de contorno

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u = 0, & (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = \phi(x,y), & (x,y) \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

siendo Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ y $\phi \in C(\partial\Omega)$.

a) Determina la función $F(x,y,u,p,q)$ y el dominio de definición $\mathcal{D}$ para que los candidatos a extremos locales de clase C^2 del funcional

$$\mathcal{F}[u] = \int_\Omega F(x,y,u(x,y), \frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y))\, dx\, dy\,,$$

definido sobre $\mathcal{D}$ sean las soluciones del problema de contorno (3).

b) Justifica que el funcional $\mathcal{F}$ es estrictamente convexo. Como consecuencia, demuestra que si el problema (3) tiene solución, ésta es única.

[16] **EJERCICIO 5.**

(a) Demuestra que la función $f(x) = x \ln|x|$ está en $L^2(-1,1)$.

(b) Calcula, cuando existan, las derivadas débiles de primer y segundo orden de f. ¿Es $f \in H^1(-1,1)$?