UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
ECUACIONES DIFERENCIALES I
Convocatoria de Febrero. 12 de febrero de 2013

Todos los ejercicios tienen la misma puntuación máxima.

Ejercicio 1.-

a) Sea $x(t)$ la solución de la ecuación del péndulo

$$x'' + \frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\, x = 0,$$

con las condiciones iniciales $x(0) = x_0,\ x'(0) = 0$. Se pide:

i) Probar que la función energía total, $E(t) := \frac{1}{2}\left(x'(t)\right)^2 - \frac{g}{l}\cos\left(x'(t)\right)$, es constante a lo largo de la solución e igual a $-\frac{g}{l}\cos(x_0)$.

ii) Demostrar que el periódo T (tiempo transcurrido desde que el péndulo se deja caer en x_0 hasta ir a $-x_0$ y volver de nuevo a la posición de partida x_0) viene dado por la integral elíptica

$$T = 2\int_{-x_0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2g}{l}\{\cos(x) - \cos(x_0)\}}}.$$

b) La ecuación de Gompertz $p' = p\,(a - b\ln(p))\,,\quad a, b > 0$, es un modelo para estudiar el crecimiento de poblaciones. Halla la solución del P.V.I. con $p(0) = p_0 > 0$, calcula, si es posible, $\lim_{t\to+\infty} p(t)$ y esboza la gráfica de la solución para los diferentes valores de p_0.

Ejercicio 2.- Se considera el P.V.I.

$$x' = t\,A\,x,\ x(0) = x_0, \tag{1}$$

con $t \in \mathbb{R},\ A \in M_n(\mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Se pide:

a) Justificar que existe una única solución de (1) definida en $\mathbb{R}$, construir las aproximaciones sucesivas y encontrar la solución expresada en términos de la exponencial de una matriz.

b) Hallar la solución de (1) cuando

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \ \text{ y } \ x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.-

a) Se considera la ecuación

$$x' = A(t)\,x + b(t), \tag{2}$$

con $A : (0, +\infty) \to M_n(\mathbb{R})$ y $b : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continuas y sean $x(t)$ e $y(t)$ dos soluciones de (2) cumpliendo $x(t_0) = x_0$ y $y(t_0) = y_0$, respectivamente, para cierto $t_0 > 0$. Prueba que, fijado $T > t_0$, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x_0 - y_0| < \delta$, entonces $|x(t) - y(t)| < \varepsilon$ para todo $t \in [t_0, T]$.

b) Halla una condición necesaria y suficiente para que la ecuación $x'' + x' = f(t)$, con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y T-periódica, tenga soluciones T-periódicas.

Ejercicio 4.-

a) Sea $x(t)$ una solución no trivial de la ecuación

$$x'' + q(t)\,x = 0, \tag{3}$$

siendo $q : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua . Prueba que si $q(t) < 0$, para todo $t > 0$, entonces $x(t)$ tiene a lo sumo un cero.

b) Si en (3) hacemos $q(t) = K/t^2$, prueba que cuando $K > 1/4$, cualquier solución de la ecuación de Euler resultante tiene infinitos ceros, pero que si $0 < K \leq 1/4$, todas sus soluciones tienen un número finito de ceros.