DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

ECUACIONES DIFERENCIALES II. GRADO EN MATEMÁTICAS.
18 de septiembre de 2013.

[3] **Ejercicio 1**.- Se consideran los p.v.i.

$$\begin{array}{ll} (1) & x' = tx,\ x(0) = 1, \\ (2) & x' = \operatorname{sen}(tx),\ x(0) = 1. \end{array}$$

Se pretende calcular una cota del error cometido al aproximar la solución $\psi_2(t)$ del p.v.i. (2) por la solución del $\psi_1(t)$ del p.v.i. (1) en el intervalo $|t| \leq 1$. Para ello se pide:

1. Construir las iterantes de Picard para (1) y determinar ψ_1 como límite de dichas iterantes.
2. Demostrar que ψ_2 está también definida para $|t| \leq 1$.
3. Comprobar que $\{ (t, \psi_i(t)) : |t| \leq 1 \} \subset [-1, 1] \times [-2, 2],\ i = 1, 2$.
4. Justificar que ψ_2 es solución ε-aproximada del p.v.i. (1) estimando ε. (Recuerda que $\operatorname{sen}(z) = z + R(z^3)$).
5. Obtener una cota del error pedido. (Sug.: utiliza la Desigualdad Fundamental).

[2] **Ejercicio 2**.- Sea $x(t; x_0, v_0)$ la solución maximal del p.v.i.

$$x'' = 2x^3,\ x(0) = x_0,\ x'(0) = v_0.$$

Calcula, si es posible,

$$\frac{\partial x(t; 0, 0)}{\partial(x_0, v_0)}.$$

[3] **Ejercicio 3**.-

1. Enunciar el Teorema de Cetaev y aplicarlo para demostrar que la solución trivial de la ecuación

$$x'' = 2x^3$$

es inestable. (Sug.: usar una función de Lyapunov del tipo $V(x, v) = ax^2 + bxv + cv^2$).

2. Hallar la solución de la ecuación anterior que verifica $x(0) = 1,\ x'(0) = 1$, especificando su intervalo maximal de definición. Para ello, efectuar previamente el cambio de variables $x'(t) = p(x)$ y resolver el p.v.i.

$$p\frac{dp}{dx} = 2x^3,\ p(1) = 1.$$

[2] **Ejercicio 4**.- Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x' &= -x^{2k+1} + \alpha x y^2, \\ y' &= -y^{2m+1} - \beta x^2 y, \end{aligned}$$

con $\alpha > 0,\ \beta > 0$ y k y m números naturales. Buscar una función de Lyapunov de la forma $V(x, y) = ax^2 + by^2$ para demostrar que la solución trivial es asintóticamente estable.