DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

ECUACIONES DIFERENCIALES II. GRADO EN MATEMÁTICAS.
26 de junio de 2013.

[3] **Ejercicio 1**.- Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio y $F_1, F_2 : D \to \mathbb{R}$ continuas con $F_1(t,x) < F_2(t,x),\ (t,x) \in D$. Sea $x_i(t),\ i = 1, 2$, una solución de la ecuación diferencial $x' = F_i(t,x)$ definida en un intervalo abierto I. Dado $t_0 \in I$, se pide probar que :

1. si $x_1(t_0) < x_2(t_0)$, entonces $x_1(t) < x_2(t)$, para todo $t \geq t_0,\ t \in I$.
2. si $x_1(t_0) > x_2(t_0)$, entonces $x_1(t) > x_2(t)$, para todo $t \leq t_0,\ t \in I$.
3. Sea (α, ω) el intervalo maximal de definición de la solución del p.v.i.

$$x' = x^2 + t^2, \ \ x(-2) = 1.$$

   Comparando, respectivamente, con los p.v.i.

$$\begin{array}{l} x' = x^2,\ x(-2) = x_0 < 1, \\ x' = x^2 + 1,\ x(-2) = x_0 > 1, \end{array}$$

   obtener una cota superior para ω y una cota inferior para α.

[4] **Ejercicio 2**.- Se considera el p.v.i.

$$x' = \lambda + tx^2,\ x(0) = 1.$$

Se pide:

1. Probar que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ tiene una única solución, $x(t;\lambda)$.
2. Encontrar $x(t;0)$ indicando su intervalo maximal de definición, I.
3. Calcular, justificando su existencia, $\frac{\partial x(t;0)}{\partial \lambda}$.
4. Usando el apartado anterior, probar que no existe una constante $M > 0$ tal que

$$|x(t;\lambda) - x(t;0)| \leq M|\lambda|,\ t \in I.$$

[3] **Ejercicio 3**.- Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -x + 2x(x+y)^2, \\ y' = -y^3 + 2y^3(x+y)^2. \end{array} \right.$$

Se pide:

1. Obtener la ecuación variacional (primera aproximación lineal) de dicho sistema en el punto de equilibrio $(0,0)$ y dibujar el correspondiente diagrama de fases.
2. Probar que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable para el sistema de partida usando la función $V(x,y) = x^2 + y^2$.