UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
ECUACIONES DIFERENCIALES, septiembre de 2011

Entrega los ejercicios en hojas separadas.
El número entre corchetes es la puntuación máxima de cada ejercicio.

[16] Ejercicio 1.-Comprueba que el cambio de variable $y(t) = e^{\int_1^t z(s)ds}$ transforma la ecuación diferencial

$$a_0(t)y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = 0$$

en una ecuación de Riccati. Usa el resultado anterior para integrar el siguiente problema de valores iniciales:

$$z' = -\frac{4}{t^2} + \frac{4}{t}z - z^2,\ z(1) = 0.$$

[20] Ejercicio 2.- De un sistema π–periódico $x' = A(t)x$ se conoce que la matriz fundamental principal en $t = 0$ viene dada por

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) & \frac{1}{2}\sin(2t) \\ -2\sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

(a) Calcula una matriz de monodromía.

(b) ¿Podría ser $\mathrm{tr}(A(t)) \neq 0$?

(c) Calcula la solución de

$$x' = A(t)x + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

que satisface $x(0) = (0,0)^T$.

(d) Estudia la existencia de soluciones π–periódicas del sistema (1).

[16] Ejercicio 3.- Construye la función de energía $E(t)$ asociada a una solución de la ecuación diferencial

$$x'' + \mu^2 x' - \mu x^5 = 0\,,$$

y discute los valores de $\mu \in \mathbb{R}$ para los que $E(t)$ es decreciente. ¿Se puede afirmar que 0 es un equilibrio estable para la ecuación anterior, para algún valor de μ?

[16] Ejercicio 4.- Discute el comportamiento asintótico del sistema

$$x' = \begin{pmatrix} \alpha & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} x$$

en función del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$.

[16] Ejercicio 5.- Calcula los valores propios y las funciones propias del problema de contorno

$$y'' + (1+\lambda)y = 0\,, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0\,.$$

[16] Ejercicio 6.- Se considera el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_0^\pi \Big((y'(x))^2 - y(x)^2 \Big)\, dx$$

definido en

$$\mathcal{D} = \left\{ y \in C^1[0,\pi] : \int_0^\pi y(x)^2\, dx = 1\,, \quad \int_0^\pi y(x)\, dx = 0 \right\}\,.$$

Calcula de forma justificada el mínimo de $\mathcal{F}[y]$ en $\mathcal{D}$ e indica en qué función se alcanza dicho mínimo.