UNIVERSIDAD DE GRANADA
Ecuaciones Diferenciales
Examen final (Sólo primer parcial). 11 de julio de 2011.

[45] EJERCICIO 1.- Resuelve las siguientes cuestiones:

1. El cambio de variable $x^2 = y$ transforma la ecuación
$$x^2 - t^2 x'^2 = t^2 x x'', \tag{1}$$
en una ecuación lineal de Euler. Determina la solución de (5) que cumple $x(1) = 1,\ x'(1) = 0$.

2. Sea $\psi \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$ una solución de
$$x' = A(t)x + b(t),$$
con $A \in C(\mathbb{R}; M_N(\mathbb{R})),\ b \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$ tales que $\int_{-\infty}^{+\infty} \|A(t)\|\, dt < +\infty,\ \int_{-\infty}^{+\infty} |b(t)|\, dt < +\infty$. Demuestra que dado $t_0 \in \mathbb{R}$, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|\psi(t)| \le M,\ \forall\, t \in [t_0, +\infty)$.

3. Estudia la existencia y el número de soluciones 2π-periódicas de la ecuación $x'' + ax = \cos(2t)$, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

[30] EJERCICIO 2.- Se considera el sistema lineal
$$x' = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} x, \tag{2}$$
con $a \in \mathbb{R}$. Se pide:

1. Estudia la acotación y convergencia de dicho sistema en función del valor de a. (Observa que $u^3 - 3u + 2 = (u-1)^2(u+2)$).

2. Calcula la matriz fundamental principal en 0 de (2) cuando $a = 1$.

3. ¿Tiene (2) alguna solución periódica no trivial para algún valor de a?

[25] EJERCICIO 3.- Se considera la ecuación
$$x'' + q(t)x = 0, \tag{3}$$
con $q \in C^1(I),\ I \subset \mathbb{R},\ q(t) \neq 0,\ q'(t) \ge 0,\ t \in I$.

1. Dada $\varphi \in C^2(I)$ solución de (3), comprueba que la función $D(t) := (\varphi(t))^2 + (\varphi'(t))^2/q(t),\ t \in I$, es decreciente.

2. Utiliza el apartado anterior para demostrar que si $t_1 < t_2$ son dos puntos críticos de una solución $\varphi(t)$ de (3), entonces $|\varphi(t_1)| \ge |\varphi(t_2)|$.

3. Como consecuencia, demuestra que toda solución de la ecuación $x'' + t^3 x = 0$ está acotada en $[1, +\infty)$. (Sug.: prueba que toda solución de esta ecuación tiene una sucesión de ceros tendiendo a infinito).

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Ecuaciones Diferenciales
Examen final (Sólo segundo parcial). 11 de julio de 2011.

[45] EJERCICIO 1.- Resuelve las siguientes cuestiones:

1. Determina las propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema

$$\begin{cases} x' = \text{ sen } (x+y), \\ y' = e^x - 1. \end{cases}$$

2. Estudia la existencia y el número de soluciones del problema de contorno $x'' + ax = \cos(2t),\ x'(0) = x'(\pi) = 0$, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

3. Demuestra que $\int_0^\pi (y'(x))^2\, dx \geq 1$ para cualquier función $y \in C_0^1[0,\pi]$ con $\int_0^\pi (y(x))^2\, dx = 1$.

[25] EJERCICIO 2.-

1. Demuestra el siguiente resultado:

   Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R},\ -\infty \leq a < b \leq +\infty$, continua y tal que el p.v.i. $x' = f(x),\ x(t_0) = x_0$ admite una única solución para cada $t_0 \in (a,b),\ x_0 \in \mathbb{R}$. Supongamos que $p \in (a,b)$ es tal que existe $\varepsilon > 0$ con $f(x) > 0,\ x \in (p-\varepsilon, p)$ y $f(x) < 0,\ x \in (p, p+\varepsilon)$, entonces el punto de equilibrio $x \equiv p$ es a.e. para la ecuación.

2. Estudia la existencia y unicidad de solución del p.v.i.

$$x' = x^{\frac{1}{3}}(1-x),\ x(0) = x_0,$$

   según el valor de $x_0 \in \mathbb{R}$. Determina, cuando sea posible, la estabilidad de los puntos de equilibrio de la ecuación anterior.

[30] EJERCICIO 3.- Se considera el p.v.i.

$$\begin{cases} x'' + \frac{x'}{1+(x')^2} + x^3 = 0, \\ x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = v_0. \end{cases} \tag{4}$$

1. Demuestra que cualquier solución maximal está definida en $[t_0, +\infty)$.

2. Sea $x(t; t_0, x_0, v_0)$ la solución maximal de (4). Calcula, si es posible, $\frac{\partial x}{\partial v_0}(t; 0, 0, 0)$.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Ecuaciones Diferenciales
Examen final. 11 de julio de 2011.

[50] <u>Ejercicio 1</u>.- Resuelve las siguientes cuestiones:

1. El cambio de variable $x^2 = y$ transforma la ecuación
$$x^2 - t^2 x'^2 = t^2 x x'', \tag{5}$$
en una ecuación lineal de Euler. Determina la solución de (5) que cumple $x(1) = 1,\ x'(1) = 0$.

2. Sea $\psi \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$ una solución de
$$x' = A(t)x + b(t),$$
con $A \in C(\mathbb{R}; M_N(\mathbb{R})),\ b \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$ tales que $\int_{-\infty}^{+\infty} \|A(t)\|\, dt < +\infty,\ \int_{-\infty}^{+\infty} |b(t)|\, dt < +\infty$. Demuestra que dado $t_0 \in \mathbb{R}$, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|\psi(t)| \leq M,\ \forall\, t \in [t_0, +\infty)$.

3. Determina las propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema
$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \text{ sen } (x+y), \\ y' = e^x - 1. \end{array} \right.$$

4. Estudia la existencia y el número de soluciones del problema de contorno $x'' + ax = \cos(2t),\ x'(0) = x'(\pi) = 0$, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

5. Demuestra que $\int_0^\pi (y'(x))^2\, dx \geq 1$ para cualquier función $y \in C_0^1[0, \pi]$ con $\int_0^\pi (y(x))^2\, dx = 1$.

[25] <u>Ejercicio 2</u>.- Se considera el sistema lineal
$$x' = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} x, \tag{6}$$
con $a \in \mathbb{R}$. Se pide:

1. Estudia la acotación y convergencia de dicho sistema en función del valor de a. (Observa que $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$).

2. Calcula la matriz fundamental principal en 0 de (6) cuando $a = 1$.

3. ¿Tiene (6) alguna solución periódica no trivial para algún valor de a?

[25] <u>Ejercicio 3</u>.- Se considera el p.v.i.
$$\left\{ \begin{array}{l} x'' + \frac{x'}{1+(x')^2} + x^3 = 0, \\ x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = v_0. \end{array} \right. \tag{7}$$

1. Demuestra que cualquier solución maximal está definida en $[t_0, +\infty)$.

2. Sea $x(t; t_0, x_0, v_0)$ la solución maximal de (7). Calcula, si es posible, $\frac{\partial x}{\partial v_0}(t; 0, 0, 0)$.