UNIVERSIDAD DE GRANADA
Ecuaciones Diferenciales
Segundo examen parcial. 27 de junio de 2011

[25] **EJERCICIO 1.** Se considera la ecuación diferencial

$$x' = tx^2(x-1)\,.$$

Se pide:

(a) Comprueba que el problema de valores iniciales asociado ($x(t_0) = x_0$, $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$) tiene existencia y unicidad de solución. Si $x(0) = 1/2$, discute en qué intervalo maximal está definida la solución.

(b) Esboza la gráfica de la solución del apartado (b).
Sugerencia: Te ayudará haber calculado los valores $x'(0)$ y $x''(0)$.

(c) ¿Hay alguna contradicción con los resultados conocidos de monotonía de las soluciones? Justifica la respuesta

[25] **EJERCICIO 2.** Se considera la ecuación diferencial

$$x'' + (\varepsilon - 1)x' + (\varepsilon - 2)^2 x^5 = 0\,, \tag{1}$$

donde ε es un parámetro real.

(a) Discute la estabilidad (no se pide estudiar la estabilidad asintótica) de los puntos de equilibrio en función de ε.

(b) Denotamos por $x(t,\varepsilon)$ la solución de la ecuación (1) con condiciones iniciales $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$. Calcula, si existe, $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t; 2)$.

[20] **EJERCICIO 3.** El siguiente enunciado es una versión incompleta del teorema de inestabilidad de Cetaev. Completa el enunciado y demuéstralo:

Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ una función localmente Lipschitzciana tal que $f(0) = 0$, $0 \in \Omega$. Se condidera la ecuación diferencial

$$x' = f(x).$$

Si existe $V \in C^1(\Omega)$ que verifica

i) $V(0) = 0$,

ii) $\dot{V}$ es definida positiva,

entonces el punto de equilibrio $x(t) \equiv 0$ es inestable.

[30] **EJERCICIO 4.**

a) Se considera el funcional

$$\mathcal{F}[y] = \int_1^e x(y'(x))^2\,dx$$

definido sobre

$$\mathcal{D} = \left\{ y \in C^1(1,e),\ \int_1^e x^{-1}y^2(x)\,dx = 1,\ \int_1^e x^{-1}y(x)\,dx = 0 \right\}.$$

Si $y \in \mathcal{D} \cap C^2$ es extremo local de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{D}$, determina la ecuación de Euler-Lagrange asociada a este problema y las condiciones de contorno que debe de verificar este candidato a extremo.

b) Calcula el mínimo de $\mathcal{F}[y]$ sobre $\mathcal{D}$ y determina la función donde se alcanza.

c) Calcula las derivadas débiles hasta orden dos en L^1_{loc} de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \le x < 0 \\ 0, & 0 < x \le 1 \end{cases}.$$

¿Existe la derivada débil de orden tres?