

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Ecuaciones Diferenciales
Primer Parcial - 18 de febrero de 2011.

Todos los apartados tienen la misma puntuación máxima. Entrega los ejercicios en hojas separadas.

EJERCICIO 1.- Resuelve las siguientes cuestiones:

1. Calcula la solución del p.v.i.

$$(t - t^2 y) y' = y, \quad y(2) = 1. \quad (1)$$

(Sug.: La ecuación admite un factor integrante $\mu = f(t^2)$.)

2. Define las aproximaciones sucesivas o iterantes de Picard del p.v.i.

$$\begin{cases} x' = x + \arctan(t) y, & x(0) = 1 \\ y' = y, & y(0) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

y calcula su límite cuando $n \rightarrow \infty$.

EJERCICIO 2.- Se considera el sistema lineal

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix} x, \quad (3)$$

con $a \in \mathbb{R}$. Se pide:

1. Discute cuál es la forma canónica real de Jordan de la matriz asociada al sistema en función del valor de a .
2. Calcula la solución de (3) que verifica $x(0) = (0, 0, 1)^t$ cuando $a = 2$.
3. ¿Tiene (3) alguna solución periódica para algún valor de a ?
4. Para algún valor de a , ¿es el sistema (3) acotado? ¿Tiene (3) alguna solución acotada?

EJERCICIO 3.- Se considera la ecuación de Bessel de índice $p \in \mathbb{R}$

$$t^2 x'' + tx' + (t^2 - p^2)x = 0, \quad t > 0. \quad (4)$$

1. Comprueba que el cambio de variable $x(t) = t^{-1/2}y(t)$ transforma ésta ecuación en

$$y'' + \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - p^2}{t^2}\right) y = 0, \quad t > 0. \quad (5)$$

2. Demuestra que las soluciones de (5) tienen infinitos ceros en $(0, +\infty)$ y que son simples.
3. Estudia la acotación y convergencia de la ecuación (5).
4. Utiliza los apartados anteriores para deducir el número de ceros y el comportamiento en infinito de las soluciones de (4).