Universidad de Granada	Final	Ecuaciones Diferenciales
Departamento de Matemática Aplicada		3^{er}. curso
Facultad de Ciencias	7–julio–2010	LDO. MATEMÁTICAS

Apellidos			Firma
Nombre	D.N.I o pasaporte	Grupo	

1) $\boxed{\text{16 ptos.}}$

1.A) Sea $f \in C^0(\mathbb{R})$ y supongamos que existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x) < 0$ si $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ y $f(x) > 0$ si $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$. Se considera la ecuación diferencial no lineal de segundo orden

$$x'' + f(x) = 0. \tag{1}$$

Define su funcional de energía asociado y demuestra que el sistema conserva energía. Demuestra que la solución $x(t) \equiv x_0$ es un punto de equilibrio estable para (2).

1.B) Se considera la ecuación diferencial no lineal de primer orden

$$x' + g(x) = 0,$$

donde $g \in C^0(\mathbb{R})$. Construye un funcional de Liapunov y caracteriza las propiedades de estabilidad asintótica e inestabilidad de los puntos de equilibrio de la ecuación a partir de las propiedades de crecimiento y decrecimientos de g en un entorno de los puntos de equilibrio.

2) $\boxed{\text{16 ptos.}}$ Discute en función del parámetro λ la existencia de soluciones del siguiente problema de contorno

$$\begin{gathered} x'' + \lambda x = \cos(2t), \\ x'(0) = 0, \quad x'(\pi/2) = 0. \end{gathered}$$

3) $\boxed{\text{7 ptos.}}$ Sea $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ y $\Phi(t)$ la matriz fundamental principal en $t = 0$ del sistema $x' = Ax$. Demuestra que A y $\Phi(t)$ conmutan $\forall t \in \mathbb{R}$.

4) $\boxed{\text{16 ptos.}}$ Sea $x(t;\epsilon)$ la solución maximal del problema de valores iniciales

$$x'' + \epsilon\left(x'\right)^2 + 4x = 0, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 2.$$

4.A) Justifica que existe el

$$\lim_{\epsilon \to 0} x\left(\frac{\pi}{2};\epsilon\right)$$

y es igual a 0.

4.B) Calcula, si es posible, $\frac{\partial x}{\partial \epsilon}(t;0)$.

5) $\boxed{\text{21 ptos.}}$ Se considera la siguiente ecuación diferencial

$$t^2(t+1)x'' + t\left((t+1)^2+1\right)x' - 2(t+1)^3 x = 0, \quad t > 0. \tag{2}$$

5.A) Comprueba que el cambio de variables $s = t + \ln t$ transforma (2) en una ecuación diferencial con coeficientes constantes.

5.B) Encuentra un sistema fundamental de soluciones de (2) y determina la solución que satisface $x(1) = e,\ x'(1) = 2e$.

5.C) ¿Dónde está definida dicha solución?

6) $\boxed{\text{24 ptos.}}$

6.A) Estudia el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación $x' = A\,x$ en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

6.B) Estudia, según el valor de $a \in \mathbb{R}$, la existencia de soluciones π–periódicas del sistema

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(4t) \end{pmatrix}.$$

6.C) Esboza el diagrama de fases de

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x.$$