DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Ecuaciones Diferenciales. Segundo parcial. 23 de junio de 2010.

El número entre corchetes es la puntuación máxima de cada ejercicio. Los apartados de un mismo ejercicio tienen todos la misma puntuación máxima.

[40] EJERCICIO 1.- Resuelve las siguientes cuestiones:

1. Estudia existencia, unicidad e intervalo de definición de soluciones maximales de los siguientes p.v.i.:
   (a) $x' = \frac{x^2-1}{t}, \;\; x(1) = -1.$
   (b) $x' = |t^2 - 7x|, \;\; x(1) = \frac{1}{7}.$
   (c) $x' = -\frac{t}{x}, \;\; x(0) = 1.$

2. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ denotamos $x(t;\lambda)$ la solución maximal del p.v.i.
$$x' = \lambda \frac{x}{t} - 1, \;\; x(1) = 0.$$
   (a) Sabiendo que $\forall\, \lambda \neq 1$,
$$x(t;\lambda) = \frac{t - t^{\lambda}}{\lambda - 1}, \; t \in (0, +\infty),$$
   determina, de forma razonada, si existe $\lim_{\lambda\to 1} x(t;\lambda)$ y, en caso afirmativo, calcúlalo. ¿Es dicho límite uniforme en t?
   (b) ¿Qué p.v.i. verifica $\frac{\partial x}{\partial \lambda}(t;1)$?

3. Estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio de la ecuación
$$x'' = x - x^3 - xx'.$$

[20] EJERCICIO 2.- Sea $F : (a,b) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ una función continua tal que existen $\gamma, \delta : (a,b) \to \mathbb{R}^+$ continuas con
$$< x, F(t,x) > \leq \gamma(t)|x|^2 + \delta(t), \;\; \forall\, t \in (a,b), \, x \in \mathbb{R}^N,$$
donde $< \cdot, \cdot >$ es un producto escalar en $\mathbb{R}^N$ y $|\cdot|$ su norma asociada, es decir, $|x|^2 :=< x, x >, \; x \in \mathbb{R}^N$. Demuestra que toda solución maximal de la ecuación $x' = F(t,x)$ está definida en (a,b).
(Sugerencia: si $\varphi(t)$ es una solución maximal de la ecuación definida en (α,ω), calcula $\frac{d}{dt}|\varphi(t)|^2$).

[40] EJERCICIO 3.-

1. Calcula los valores propios y las funciones propias del problema de Sturm-Liouville regular
$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0, \\ x'(0) = x(\pi) = 0. \end{cases}$$

2. Determina, de forma justificada,
$$\min \left\{ \int_0^{\pi} (x'(t))^2 \, dt \; : \; x \in C^1[0,\pi], \; x(\pi) = 0, \; \int_0^{\pi} (x(t))^2 \, dt = 1 \right\}.$$
   ¿ Dónde se alcanza este mínimo?

3. Estudia la existencia y el número de soluciones del problema de contorno
$$\begin{cases} x'' + \frac{1}{4}x = t - a, \\ x'(0) = x(\pi) = 0, \end{cases}$$
   en función del valor de $a \in \mathbb{R}$.