Universidad de Granada	Primer parcial	Ecuaciones Diferenciales
Departamento de Matemática Aplicada		3^{er}. curso
Facultad de Ciencias	18–febrero–2010	Ldo. Matemáticas

Apellidos			Firma
Nombre	D.N.I o pasaporte	Grupo	

1) $\boxed{\text{4 ptos.}}$ Responde razonadamente a cada una de las siguientes cuestiones.

1.A) Demuestra que lel cambio de variable $v = \ln(y)$ transforma la ecuación diferencial $y' + P(x)y = Q(x)(y\ln(y))$ en la ecuación diferencial lineal $v' + P(x) = Q(x)\,v$. Usa esta propiedad para resolver: $x\,y' - 4x^2y + 2\,y\ln(y) = 0$.

1.B) ¿Es posible que una matriz solución de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales pueda tener determinante nulo en unos puntos y no nulo en otros?

1.C) Demuestra que toda solución no trivial de la ecuación $x'' - \ln\left(\dfrac{1}{t^2+1}\right)x = 0$ está definida en $\mathbb{R}$ y tiene infinitos ceros.

1.D) ¿Existe una única (salvo factor constante) ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes de orden cuatro que tiene por solución $t\cos t$?

1.E) Encuentra un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = \mu(x)$ para la ecuación $y'(x^2y - x) + y = 0$ y resuélvela.

2) $\boxed{\text{3 ptos.}}$ Se considera la matriz de coeficientes constantes $A = \begin{pmatrix} b & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, siendo $a, b \in \mathbb{R}$.

2.A) Estudia el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación $x' = A\,x$ en términos de los parámetros a y b.

2.B) Estudia, en función de $a \in \mathbb{R}$, la existencia de soluciones π–periódicas del sistema

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

2.C) Esboza el diagrama de fases de

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x.$$

3) $\boxed{\text{3 ptos.}}$ Sea $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ y $\mu = \max\{\mathrm{Re}(\lambda),\, \lambda \in \sigma(A)\}$ verificando $\mu < 0$ y sea $B \in C(\mathbb{R}, \mathcal{M}_N(\mathbb{R}))$ tal que

$$\int_0^\infty \|B(t)\|\,dt < \infty\,.$$

3.A) Demuestra que para cada $\nu > \mu$ existe una constante $c_\nu > 0$ tal que $\|e^{A\,t}\| \le c_\nu\, e^{\nu\, t}$.

3.B) Demuestra que el sistema $y' = (A + B(t))y$ es convergente.

3.C) Si λ es un valor propio de A y v es un vector propio asociado, comprueba que existe $y(t)$ solución de $y' = (A + B(t))\,y$ tal que $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-\lambda t}y(t) = v$.